



Correlation Functions of In- and Out-of-Equilibrium Integrable Models

*J. De Nardis*



Deze manieren van aanpak zijn afhankelijk van zekere aannames die zelden gecontroleerd kunnen worden met een exacte oplossing voor ieder mogelijk aantal deeltjes  $N$ . Maar wanneer we slechts één-dimensionale systemen beschouwen blijkt het wél mogelijk te zijn om exacte oplossingen te vinden voor modellen met interacties en die ook nog eens fysiek relevant zijn.

Deze modellen worden integreerbare genoemd en twee voorbeelden, die behandeld worden in dit proefschrift, zijn de XXZ Heisenberg spin keten <sup>1</sup> en het Lieb-Liniger model voor bosonen met punt-interacties <sup>2</sup>. Net zoals theorieën zonder interactie teruggebracht kunnen worden tot één-deeltjes fysica, zo kunnen bij deze modellen de veel-deeltjes verstrooiing teruggebracht worden tot series van twee-deeltjes interacties <sup>3</sup>. Deze reductie wordt opgelegd door een aantal interne symmetrieën. Deze spelen bovendien de rol van randvoorwaarden op de niet-equilibrium tijdsevolutie van de dichtheidsmatrix die bij het systeem hoort. Een opvallende consequentie hiervan is dat de tijdsevolutie van een generieke begintoestand veel meer geheugen bezit van de begincondities dan het geval is bij een generiek systeem met interacties, waarbij de dichtheidsmatrix simpelweg relaxeert naar het gebruikelijke Gibbs ensemble.

Als de begintoestand een pure toestand is en geen eigentoestand van de Hamiltoniaan (globale quantum quench) dan wordt de asymptotische evenwichtstoestand, welke de verwachtingswaarden van de alle lokale observabelen in equilibrium beschrijft, niet triviaal gekarakteriseerd door één enkele temperatuur zoals het geval is voor het Gibbs ensemble, maar door veel meer extra informatie over de begintoestand. Een standaard vraagstuk in deze context is het

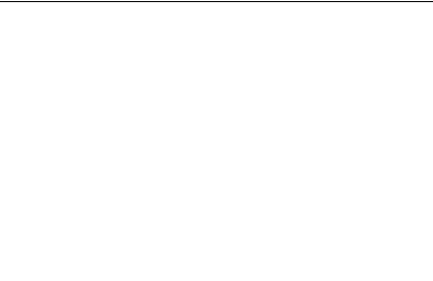


Figure 1: Experimentele data voor de tijdsevolutie (van boven naar beneden gezien) van de fase-fasecorrelaties  $\langle \Psi^\dagger(z)\Psi(z') \rangle$  (waarbij  $\Psi^\dagger, \Psi$  de bosonische creatie/annihilatie operatoren zijn) als een functie van de relatieve afstand  $\bar{z} = z - z'$  van een één-dimensionaal Bose gas nadat het op coherente wijze in twee delen is opgesplitst. Het experiment wordt gerealiseerd met koude atomen die interactie hebben via contact en zich bevinden in een effectief één-dimensionale val zodanig dat het quantum gas beschouwd kan worden als een Lieb-Liniger gas van bosonen.

<sup>1</sup>Met Hamiltoniaan  $H = J \sum_{j=1}^L \left( \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right)$ , waarbij  $\sigma_j^\alpha$  de Pauli matrices zijn die geassocieerd worden met iedere spin op het rooster.

<sup>2</sup>Met Hamiltoniaan  $H = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta(x_i - x_j)$  die werkt op bosonische golffuncties  $\Psi(x_1, \dots, x_N)$ .

<sup>3</sup>Er is namelijk geen creatie van nieuwe momenta bij deze verstrooiingen. Als  $N$  deeltjes verstrooien met beginmomenta  $(k_1, \dots, k_N)$  dan kan de eindtoestand beschreven worden door een nieuwe verzameling van momenta die simpelweg een permutatie  $\mathcal{P}$  is van de begintoestand  $(k'_1, \dots, k'_N) = \mathcal{P}(k_1, \dots, k_N)$ . Aan de andere kant krijgt ieder deeltje een niet-triviale faseverschuiving tijdens het verstrooiingsproces wat er voor zorgt dat de momenta  $(k_1, \dots, k_N)$  aan een verzameling niet-lineaire gekoppelde vergelijkingen moeten voldoen, de zogeheten Bethe vergelijkingen.

vaststellen van de thermodynamische relevante informatie over de begintoestand die men zal moeten achterhalen om de equilibrium verwachtingswaarden van alle lokale observabelen vast te kunnen stellen (gerepresenteerd door operatoren die niet-triviaal op slechts een eindige subregion van het systeem werken). Dit zijn degene die we direct in het laboratorium kunnen observeren <sup>4</sup> (zie figuur 1).

Het doel van dit proefschrift is om een methode te ontwikkelen om de niet-equilibrium dynamica van integreerbare systemen te bestuderen in hun thermodynamische limiet. In dit regime kunnen we enkele expliciete resultaten verwachten, aangezien we het systeem kunnen beschrijven in termen van de thermodynamisch emergerende vrijheidsgraden. Over het algemeen is dit een makkelijkere beschrijving dan die in termen van posities en momenta van alle deeltjes. Bovendien kunnen we slechts in de thermodynamische limiet algemene opmerkingen maken over de thermalisatie van een geïsoleerd systeem. We observeren inderdaad alleen een perfecte relaxatie van de lokale observabelen als het aantal deeltjes in het systeem naar oneindig gaat. Wanneer we in deze limiet slechts een eindig deel van het gehele systeem bekijken, dan zal het complementaire deel zich gedragen als een effectief oneindig bad wat relaxatie processen van de lokalen observabelen induceert.

In het volgende deel zullen we de belangrijkste resultaten uit dit proefschrift noemen.

## Overlappen in integreerbare modellen

Om een exacte beschrijving te krijgen van de niet-equilibrium tijdsevolutie gegeven door een quantum quench, zal men de overlap moeten vinden tussen de basis van eigentoestanden van het model, gegeven door de Bethe toestanden, en de begintoestand, welke in het algemeen erg verschilt van alle eigentoestanden <sup>5</sup>. Een fysisch interessante groep van begintoestanden zijn de eigentoestanden van het model met verschillende koppelingsconstanten. Zoals de algebraïsche methode om de exacte oplossing van integreerbare modellen te vinden, de algebraïsche Bethe ansatz, handige uitdrukkingen geeft voor de overlappen tussen

<sup>4</sup>We definiëren een lokale observable als de actie van een operator  $\hat{O}(x)$  die werkt op een gedeelte  $[x, x + \delta x]$  van het gehele volume  $L$ , zodanig dat  $\lim_{th} \delta x/L = 0$ , en met een verwaarloosbare intensiteit in vergelijking met de totale energie van het systeem  $\lim_{th} \frac{\langle \hat{O} \rangle}{\langle H \rangle} = 0$ . Met  $\lim_{th}$  bedoelen we de thermodynamische limiet waarbij het aantal deeltjes  $N \rightarrow \infty$  in een volume  $L \rightarrow \infty$  terwijl de dichtheid constant is  $D = N/L$ .

<sup>5</sup>Om de tijdsevolutie na een quench te berekenen van de begintoestand  $|\Psi_0\rangle$  van een generieke operator  $\hat{O}$ , zal men over het algemeen tweemaal de identiteitsoperator  $\mathbf{1} = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle\langle\lambda|$  invullen door gebruik te maken van de basis van eigentoestanden van het model zodanig dat  $\langle\Psi_0|\hat{O}(t)|\Psi_0\rangle = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \langle\mu|\hat{O}|\lambda\rangle e^{it(E_{\mu}-E_{\lambda})} \langle\Psi_0|\mu\rangle\langle\lambda|\Psi_0\rangle$ . Vervolgens moet men alle overlappen kennen voor iedere eigentoestand  $\langle\Psi_0|\mu\rangle \forall \mu$ . We karakteriseren de begintoestand  $|\Psi_0\rangle$  als ver verwijderd van alle eigentoestanden van het systeem als de overlappen exponentieel afnemen met het aantal bestanddelen  $N$ ,  $\langle\Psi_0|\mu\rangle \sim e^{-Nc|\mu|} \forall \mu$  met  $\Re c \geq 0$ .

twee arbitraire Bethe toestanden met dezelfde koppelingsconstante, zo is een analoog resultaat voor toestanden met twee verschillende koppelingsconstanten nog niet bekend. In dit proefschrift geven we de exacte overlappen voor twee specifieke gevallen waarbij de begintoestand de grondtoestand van een vrije theorie is. Voor het Lieb-Liniger model wordt dit bereikt door de koppelingsconstante van de interacties tussen de deeltjes in het gas op nul te zetten  $c \rightarrow 0$ , wat resulteert in een veel-deeltjes vrije bosonische theorie. Op dezelfde wijze vinden we de overlappen van de Bethe toestanden voor de XXZ spin keten met de grondtoestand van het model in de limiet van oneindige anisotropie  $\Delta \rightarrow \infty$ , waarin het XXZ model reduceert tot de klassieke longitudinale Ising spin keten. Deze twee uitdrukkingen voor de overlappen zijn opvallend elegant in termen van de quasimomenta die de Bethe toestanden parametriseren en ze lijken erg op de formules die de norm van iedere Bethe toestand geeft. Dit suggereert dat we in de toekomst wellicht expliciete formules voor meer generieke overlappen kunnen vinden.

## Post-quench evenwichtstoestand in het Lieb-Liniger gas en in de XXZ spin keten

Dit proefschrift geeft de eerste niet-Gibbs evenwichtstoestand na een niet-equilibrium tijdsevolutie van modellen met interactie. De niet-equilibrium evolutie wordt geïmplementeerd door een begintoestand op unitaire wijze te laten evolueren onder een integreerbare Hamiltoniaan, zoals het Lieb-Liniger gas voor bosonen met punt-interactie en de XXZ spin keten, een model voor spins met interacties op een rooster. Door de aanwezigheid van niet-triviale behouden grootheden in de modellen, relaxeren de verwachtingswaarden van lokale operatoren, zoals de dichtheids-dichtheidscorrelatie of de nearest-neighbors spin-spin correlatie, niet naar de verwachtingswaarden die reproduceerbaar zijn door een Gibbs-achtig ensemble. Zelfs een generalisatie hiervan, het Gegeneraliseerde Gibbs Ensemble <sup>6</sup> die probeert om al de andere lokale randvoorwaarden in het systeem op te nemen, faalt in het geven van correcte voorspellingen. In het geval van het Lieb-Liniger model zien we inderdaad dat de behouden grootheden geplaagd worden door vervelende divergenties waardoor ze niet geëvalueerd kunnen worden op de begintoestand. Binnen de XXZ spin keten blijkt de verzameling lokale grootheden niet volledig te zijn, waardoor er meer onbekende extra randvoorwaarden meegenomen moeten worden. We adresseren het probleem met een alternatieve aanpak, de zogeheten quench actie aanpak, die niet afhankelijk is van enige aanname omtrent de interne symmetrieën van het systeem, maar slechts van de verrijzende vorm van de overlappen tussen de

---

<sup>6</sup>Het Gibbs ensemble zou de equilibrium waarden van de fysische operatoren in de meeste systemen met interacties moeten reproduceren  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Psi_0 | \hat{O}(t) | \Psi_0 \rangle = \text{Tr} \left( e^{-\beta H} \hat{O} \right) / \text{Tr} \left( e^{-\beta H} \right)$  waarbij  $\beta^{-1}$  de effectieve temperatuur van de begintoestand is. Zodra er meer lokale behouden grootheden zijn dan slechts de Hamiltoniaan, zal het gegeneraliseerd moeten worden naar het Gegeneraliseerd Gibbs Ensemble  $e^{-\sum_n \beta_n Q_n}$  waarbij  $\{Q_n\}$  de maximale verzameling van lokale operatoren is die commuteren met de Hamiltoniaan  $H$ .

eigentoestanden en de begintoestand in de thermodynamische limiet. Dit geeft een verzameling effectieve randvoorwaarden die gebruikt kunnen worden om de evenwichtstoestand te bepalen en die blijkt dan ook exact te zijn. Hoe zo een exacte evenwichtstoestand gereproduceerd kan worden door gebruik te maken van het Generaliseerde Gibbs Ensemble is tot dusverre niet duidelijk.

## Tijdsevolutie

Terwijl sommige feiten over de evenwichtstoestand na een niet-equilibrium tijdsevolutie over het algemeen wel bekend zijn, is dat niet het geval voor de tijdsevolutie naar het equilibrium toe. Over het algemeen is dit een veel moeilijker probleem.

Een vrij gebruikelijke constatering is bijvoorbeeld dat, om de gehele tijdsevolutie van een bepaalde begintoestand te reproduceren een veel grotere hoeveelheid informatie over deze toestand nodig is in vergelijking met wat er nodig is om de evenwichtstoestands op oneindige tijd te kennen. Desalniettemin laten we in dit proefschrift zien dat dit niet het geval is voor een quenched integreerbaar model (zie figuur 2). De thermodynamische limiet selecteert inderdaad slechts een gedeelte van alle informatie over de begintoestand die verantwoordelijk is voor de gehele tijdsevolutie tot aan de oneindige tijd wanneer het systeem gerelaxeerd is naar zijn evenwichtstoestand. Dit is een direct gevolg van de quench actie aanpak die ook voor een algemeen hulpmiddel zorgt om toegang te krijgen tot de effectieve tijdschalen van de niet-equilibrium dynamica die opgeslagen zijn in the post-quench effectieve snelheid van propagatie van de excitaties. Dit is tevens een functionaal van de begintoestand en is niet afhankelijk van alle details, maar van de macroscopische parameters zoals de energiedichtheid. Hieruit volgt dat verschillende begintoestanden zullen leiden tot effectieve veldentheorieën met verschillende lichtsnelheden.

Naast de theoretische relevantie van de gehele tijdsevolutie is het ook gerelateerd

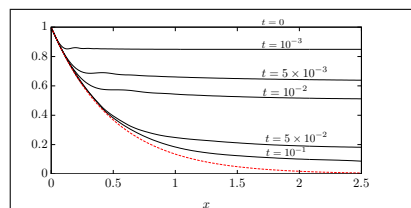


Figure 2: De tijdsevolutie (zwarte lijnen van boven naar beneden gezien) van fasecorrelaties  $\langle BEC(t)|\Psi^+(x)\Psi(0)|BEC(t)\rangle$  als een functie van de relatieve afstand  $x$  van een één-dimensionaal Bose gas na een quench van de grondtoestand van de vrije theorie (Bose-Einstein condensaat  $|BEC\rangle$ ) naar het regime met oneindig sterke afstoting (hard-core bosonen). De rode stippellijn laat verwachtingswaarden zien van de evenwichtstoestand. Deze wordt niet gegeven door een effectief thermaal Gibbs ensemble  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle BEC(t)|\Psi^+(x)\Psi(0)|BEC(t)\rangle \neq \text{Tr} \left( e^{-\beta H} \Psi^+(x)\Psi(0) \right)$ , maar door de zadelpunt toestand  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle BEC(t)|\Psi^+(x)\Psi(0)|BEC(t)\rangle = \langle \rho_{sp} | \Psi^+(x)\Psi(0) | \rho_{sp} \rangle$  gegeven door de quench actie aanpak  $\lim_{t \rightarrow \infty}$ . Deze aanpak reproduceert ook de gehele tijdsevolutie naar het equilibrium met de minimale hoeveelheid informatie over de begintoestand.

aan experimentele realisaties. Experimenten met koude atomen zijn namelijk gelimiteerd in tijdsspanne, daaruit volgt dat het observeren van een evenwichtstoestand die ontstaat na een oneindige tijd nadat de quench heeft plaatsgevonden, hopeloos is in een echte context (zie figuur 1).