Universiteit van Amsterdam

Several Topics in Complex Variables

I.M. Smit

Samenvatting: Several Topics in Complex Variables

Dit proefschrift bestaat uit drie artikelen in de complexe analyse, het vakgebied dat zich bezig houdt met functies van complexe variabelen.

We kijken bijvoorbeeld naar functies gedefinieerd op een gebied $U \subseteq \mathbb{C}^m$. Het gebied U kan eveneens als gebied in $\mathbb{R}^{2m}$ worden beschouwd, maar de extra structuur die de complexe getallen bieden, levert nieuwe eigenschappen waar de functie f aan kan voldoen.

In het bijzonder zijn de holomorfe bijectieve functies van belang. Een functie $f\colon U \to V$ tussen gebieden in $\mathbb{C}^m$ is een holomorfe bijectie, wanneer hij de punten in U en V paarsgewijs aan elkaar koppelt, en daarbij de complexe structuur behoudt. Als er tussen U en V een holomorfe bijectie bestaat, zijn deze gebieden in zekere zin 'hetzelfde'; dit wordt biholomorf genoemd.

De complexe analyse houdt zich onder andere bezig met het contrast tussen functies van reële en van complexe variabelen. Welke eigenschappen van een functie f zijn goed verenigbaar met de complexe structuur, en blijven bijvoorbeeld behouden wanneer we naar de samenstelling $f \circ g$ met een holomorfe bijectie g kijken?

Een ander veelvoorkomend thema is het vergelijken van een één-dimensionale situatie met een geval waarbij een functie f van meerdere complexe veranderlijken afhangt. Over complexe analyse in één variabele is veel bekend, maar de introductie van een tweede variabele creëert allerlei nieuwe mogelijkheden.

De drie artikelen waar dit proefschrift op berust kunnen dan ook allemaal worden gezien als onderdeel van een jacht naar parallellen.

Het eerste artikel gaat over maximaliteitseigenschappen in *plurifijne pluripotentiaaltheorie*. De woorden 'pluri' en 'plurifijn' zijn al een indicatie dat dit onderwerp deel uitmaakt van een systeem van analogieën en generalisaties.

Het basisstukje van deze puzzel wordt gevormd door de harmonische en subharmonische functies op een deelverzameling $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Als m gelijk is aan 1, zijn dit precies de (affien) lineaire functies $f(x) = ax + b$ en de convexe functies.

Zo'n lineaire functie kan gezien worden als een *maximale* convexe functie: er is geen enkele convexe functie die lokaal een stukje boven een lineaire functie uitsteekt.

De *plurifijn pluri(sub)harmonische* functies vormen een generalisatie van een complex analoog van deze (sub)harmonische functies. Hier is maximaliteit een stuk interessanter: niet elke maximale plurifijn plurisubharmonische functie is plurifijn pluriharmonisch. De omgekeerde inclusie is wel geldig.

In Hoofdstuk 2 onderzoeken we deze vorm van maximaliteit, en zoeken naar analogiën met al bekende maximaliteitseigenschappen in de andere puzzelstukjes.

Het tweede artikel gaat over een onderwerp in de complexe dynamica. Laat $f_0, f_1, f_2, \ldots$ een rij holomorfe bijecties van $\mathbb{C}^m$ naar $\mathbb{C}^m$ zijn, met de oorsprong als uniform aantrekkend gezamenlijk vast punt:

$$C||z|| \leq ||f_n(z)|| \leq D||z|| \quad \text{voor alle } z \in \mathbb{C}^m \text{ met } ||z| \leq 1, \text{ en voor alle } n \in \mathbb{N},$$

waarbij $0 < C < D < 1$.

Volgens het *sterkere Bedford Vermoeden* moet de verzameling

$$\Omega_{(f_n)} = \{z \in \mathbb{C}^m : f_n \circ \cdots \circ f_0(z) \to 0 \text{ as } n \to \infty\}$$

van punten die onder de compositie van de afbeeldingen f_n naar de oorsprong convergeren, biholomorf zijn aan $\mathbb{C}^m$.

Dit is welbekend in $\mathbb{C}^1$, maar in meer veranderlijken is het nog altijd een open vraag. In ons artikel in Hoofdstuk 3 bouwen we voort op een argument van Abbondandolo en Majer, en bewijzen het Bedford Vermoeden in $\mathbb{C}^2$ onder de extra aanname dat $D^{11/5} < C$. Hiermee verbeteren we het vorige record, dat op $D^{29/14} < C$ stond.

Hoofdstuk 4 gaat opnieuw over samenstellingen van functies, maar dit keer bekijken we de iteraties van een vast polynoom. (Denk bijvoorbeeld aan $p(z) = z^2 + 2$.) Een Fatou component U van zo'n polynoom p is een maximale samenhangende open verzameling van punten die ook na herhaald toepassen van p bij elkaar in de buurt blijven: $\{p^n|_U\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een normale familie.

Voor een polynoom p op $\mathbb{C}$ zegt de Stelling van Sullivan dat elke Fatou component op den duur periodiek wordt. Dat wil zeggen, er bestaan natuurlijke getallen n en $k \geq 1$ waarvoor $p^{n+k}(U) = p^n(U)$.

Voor een polynoom p van twee variabelen is dit niet langer waar; nu kunnen Fatou componenten eeuwig ronddwalen zonder ooit op dezelfde plaats terug te komen. In Hoofdstuk 4 kijken we naar polynomen van de vorm $F(z, w) = (f(z, w), \lambda w)$ met $|\lambda| < 1$ en onderzoeken of deze situatie zwervende Fatou componenten toelaat. We identificeren een substantiële klasse van functies waarbij Sullivan's Stelling van toepassing is: alle Fatou componenten worden op den duur periodiek.

Deze drie onderwerpen zijn verschillend, maar niet ongerelateerd. In Hoofdstukken 3 en 4 kijken we beide naar het gedrag van een verzameling onder het herhaald toepassen van functies. En om het resultaat in Hoofstuk 4 te bewijzen, speelt de subharmonische Green's functie een belangrijke rol.