



*Nonlinear Dynamics and the Instability of Anti-de Sitter Space.*

F. Dimitrakopoulos

# Niet-lineaire dynamica and de (in)stabiliteit van anti-de Sitter

## Context

Historisch gezien gaan stabiliteitsoverwegingen en storingsrekening terug naar de tijd van de klassieke mechanica en toen men vragen ging stellen over de stabiliteit van het zonnestelsel voor grote tijdschalen. Voortbordurend op het werk van Copernicus, plaatste Johannes Kepler de zon in het midden van het zonnestelsel om vervolgens de banen van onze planeten te bepalen. Met de observaties van de bekende astronoom Tycho Brache, kon hij laten zien dat de banen van onze planeten ellipsen zijn en dat de planeten weer terugkomen bij hun begin positie na elke omlooptijd.

Dit plaatje zou echter snel op de proef gesteld worden. Nadat Newton zijn wetten had geformuleerd en de ellips banen van Kepler had afgeleid door alleen de interactie van de zon met de planeten mee te nemen, begon het ook duidelijk te worden dat de aantrekkende kracht van de planeten onderling ook een belangrijk effect zou kunnen zijn. Hoewel de zon de grootste zwaartekracht levert, kunnen deze onderlinge interacties voor kleine veranderingen zorgen die groeien in de tijd en zo grote verandering kunnen worden die de Kepler-banen kunnen vernietigen.

De studie naar dit soort vraagstukken over stabiliteit onder kleine verstoringen heeft tot buitengewone ontdekkingen geleid in zowel natuur- en wiskunde. Het belangrijkste resultaat is waarschijnlijk het bekende Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) theorema waarin werd aangetoond dat stabiele of instabiele planeet banen kunnen bestaan afhankelijk van of de verhouding tussen de onverstoorte frequenties een rationaal getal is.

De vraagstukken over stabiliteit kregen een nieuwe twist toen Albert Einstein in 1915 zijn theorie van gravitatie, de Algemene Relativiteitstheorie publiceerde. Volgens de theorie van Einstein, is gravitatie geen kracht, maar een manifestatie van de meetkunde van de ruimtetijd waarin massas bewegen. Massieve objecten krommen ruimtetijd en de ruimtetijd reageert hierop door de massas voor te schrijven in welke paden zij moeten bewegen. De vergelijkingen van Einstein laten drie vacuum oplossingen toe, namelijk drie verschillende lege ruimtetijden die gekarakteriseerde worden door de kosmologische constante. Bij een positieve (negatieve) constante spreken we over de Sitter (anti-de Sitter) ruimtetijd en een ruimtetijd met een kosmologische constante gelijk aan nul noemen we Minkowski. Bij het bestuderen van deze vacuum oplossingen, is een van de belangrijkste vragen of ze stabiel zijn onder kleine verstoringen.

## Motivatie van het onderzoek

Stabiliteit van vacuüm oplossingen van Einsteins theorie van gravitatie is, na de stabiliteit van ons zonnestelsel, een van de belangrijkste vraagstukken en heeft voor een van de grootste ontwikkelingen in de wiskunde achter de algemene relativiteitstheorie gezorgd [?]. Stabiliteit van twee van de drie vacuüm oplossingen was een lange tijd geleden al bewezen vanaf Christodoulou en Klainerman. De stabiliteit van de derde oplossing, anti-de Sitter (AdS) werd niet eens beschouwd, laat staan werd zijn stabiliteit bewezen, tot vrij recentelijk.

Anti-de Sitter ruimtetijd speelt een belangrijke rol in de moderne theoretische natuurkunde. Dit komt doordat het terugkomt in een concreet voorbeeld van de ijk/gravitatie dualiteit, de AdS/CFT correspondentie. In deze dualiteit is een quantum velden theorie die leeft op de rand van AdS volkomen gelijk aan een snaartheorie in de AdS ruimtetijd. Ondanks deze reden is er pas recentelijk in detail gekeken naar (niet-lineaire) stabiliteit van AdS, ook al vermoedde men eerder, vanaf Dafermos, al dat AdS niet-lineair instabiel zou zijn.

## Resultaten

### Hoofdstuk 2:

In dit hoofdstuk presenteren we een alternatieve en complementaire methode om het probleem van de stabiliteit van AdS direct in reële ruimte te bestuderen. We leiden een benaderende/perturbatieve bewegingsvergelijkingen af welke een zelfde schalingssymmetrie heeft als die gezien wordt door de Fourier ruimte methoden (TTF vergelijkingen) te gebruiken. We laten ook zien dat de gravitationele interactie nabij het centrum van de ruimtetijd een exacte antisymmetrie onder tijdsomkering heeft en daarom zal focusering of defocusering van energie met gelijke kansen optreden. Tenslotte, beschouwen we in het kort de thermalisatie van de randtheorie en beargumenteren we dat zelfs als zwarte gaten gevormd worden in de eerste niet-lineaire tijdschalen ( $\epsilon^{-2}$ ), er niet altijd effectieve thermalisatie in de randtheorie is.

### Hoofdstuk 3:

Het benaderen van niet-lineaire dynamica met een beperkte perturbatieve expansie is accuraat voor een tijdje, maar verliest in het algemeen precisie bij lange tijdschalen die inverse proportioneel is aan de expansie parameter (in ons geval,  $t \sim \epsilon^{-2}$ ). In dit hoofdstuk laten we een aantal gevallen zien waarbij zon verlies van precisie niet optreedt en de perturbatieve expansie ook geldt bij deze tijdschalen, zolang het recursief wordt toegepast. Er zijn gevallen waarbij men kan proberen een vorm van de (oppassende) oplossing te gebruiken om een slimmere storingstheorie op te zetten die deze oplossing kan reproduceren. Dit is bijvoorbeeld het geval bij het *Two Time Framework* (TTF). We laten inderdaad zien in dit hoofdstuk dat als men een storingsrekening opzet lijkend op die gebruikt in het tweede hoofdstuk van dit proefschrift, dan zijn de oppassend oplossingen van deze benadering geldig voor tijden tot  $t \sim \epsilon^{-2}$  and niet alleen

voor  $t < \epsilon^{-2}$  zoals men zou verwachten. Door deze resultaten te gebruiken kunnen we het bestaan van een open verzameling van begincondities bevestigen die niet ineenstorten tot deze *lange tijdschaal*.

#### **Hoofdstuk 4:**

Bij pogingen om ineenstortende oplossingen bij de verdwijnende amplitude limiet  $\epsilon \rightarrow 0$  te construeren [?] werden oplossingen van de TTF gevonden die een oscillerende singulariteit hadden. Echter is deze singulariteit een ijk-artefact; in een andere ijk keuze wordt deze singulariteit van afgeleiden van de fasen niet geobserveerd. In dit hoofdstuk laten we zien dat deze oplossingen echte singuliere oplossingen zijn en dat de tegenstrijdigheid van de resultaten in de twee ijk keuzes gerealiseerd werd als een divergerende roodverschuiving tussen de rand en het centrum van de ruimtetijd.

#### **Hoofdstuk 5:**

In dit hoofdstuk onderzoeken we de amplitude en fase van de dynamica van de kleine verstoringen in AdS4 door gebruik te maken van de Two Time Framework benadering. Onze intentie was het testen van een vermoeden, het phase coherent cascade vermoeden, van Freivogel en Yang voor verschillende begincondities. Dit hebben we op twee manieren gedaan; ofwel door direct de fase coherente ansatz te verifiëren, dan wel door het machtsverband van het spectrum van de ineenstortende oplossingen te bestuderen. De resultaten suggereren dat deze ansatz best wel goed werkt, maar dat kleine aanpassingen eventueel nodig zijn. Wij vinden dat het energie spectrum van smalle Gaussiaanse golfpakketjes schaal als  $E_n \sim n^{-1}$  en ook dat de fasen coherent uitgelijnd zijn ( $B_n \sim n$ ), hoewel enkele kleine divergenties van het lineaire gedrag ook gezien werden. We hebben ook de omstreden two-mode equal energy data onderzocht en wij vermoeden dat zij tot een nieuwe klasse van oplossingen behoren die ineenstorten bij een oneindige *slow time*  $\tau$ , in de verdwijnende amplitude limiet.

### **Vooruitblik**

Stabiliteitsvraagstukken hebben tot waanzinnige ontdekkingen in de theoretische natuurkunde en wiskunde geleid en de stabiliteit van AdS is hierop geen uitzondering. Hoewel de vraag nog niet ondubbelzinnig beantwoord is, en misschien is er nog een lange weg te gaan, maar het onderzoek tot dusver heeft al een zeer rijke fenomenologie laten zien. Toch zijn er nog steeds veel vragen die beantwoord moeten worden, zoals wat er gebeurt als er bijvoorbeeld geen sferische symmetrie wordt aangenomen, of wat het lot is van kleine verstoringen op grote tijdschalen. De stabiliteit van AdS is niet alleen interessant vanuit de puur wiskundige aspecten van de algemene relativiteitstheorie, maar kan ook helpen bij het begrijpen van thermalisatie van de randtheorie via de *AdS/CFT* correspondentie. Er zijn al enkele zeer interessante ontwikkelingen gaande in deze richting, alsmede een interessante connectie tussen quantum opwekkingen (van de randtheorie) en stuitende meetkundes in de binnenkant van AdS.