1

Zonder kennis van de wiskunde geen toegang? Conceptuele kwesties in de geschiedenis van de wiskunde

Machiel Keestra

1.1 Cultuurgeschiedenis en wiskunde – twee tegengestelde domeinen?

Cultuurgeschiedenis en wiskunde zijn twee verschijnselen die niet vanzelfsprekend in een adem genoemd worden. Sterker nog: op het eerste gezicht lijken cultuurgeschiedenis en wiskunde twee aan elkaar tegengestelde onderwerpen te zijn. Twee onderwerpen die naar hun eigen aard een totaal verschillende behandeling schijnen te vragen. Een behandeling die bovendien plaatsvindt in zo verschillende circuits en zo verschillende betoogwijzen, dat men ze wel paradigmatisch kan beschouwen voor de 'two cultures', waartussen regelmatig een ontstellende kloof opgemerkt wordt. Om dit toe te lichten zal ik eerst een aantal van de belangrijkste aspecten bespreken die cultuurgeschiedenis en wiskunde uit elkaar lijkt te drijven, althans op het eerste gezicht.

Toeval versus noodzakelijkheid?

Geschiedenis lijkt per definitie aan cultuur gebonden te zijn. Geschiedenis verhaalt over het algemeen van menselijke gebeurtenissen en is in die zin een variant van de historie, het verhaal. Een wezenlijk onderdeel van elke cultuur is juist het verhalen van gebeurtenissen. Die gebeurtenissen kunnen waar gebeurd zijn dan wel voortspruiten uit de menselijke fantasie: vaak hebben die verhalen een functie om de cultuur te structureren door middel van historische of mythologische inhouden. Hermeneutiek en andere tekstkritische benaderingen benadrukken dan ook dat er geen strikte scheiding gemaakt kan worden tussen feit en fictie in de geschiedenis. Nu lijkt dit voornamelijk op te gaan voor verhalen over gebeurtenissen die primair cultureel van aard zijn, die te maken hebben met de mensheid en menselijke samenlevingen.

Inmiddels weten we echter dat ook de aarde en de levende natuur een geschiedenis kennen. Geschiedenis bleek niet alleen afhankelijk van de interactie tussen mensen en fenomenen, zoals taal en religie en staatsvorming. In elke geschiedenis spelen toevallige gebeurtenissen een belangrijke rol: meteoren, overstromingen, ziektes, revoluties.

Met de wiskunde lijken we een wezenlijke tegenpool van de geschiedenis te bezitten. In de wiskunde gaat het immers helemaal niet om mensen of gebeurtenissen, laat staan om ontwikkelingen. De wiskunde beschrijft juist structuren of relaties die niet getekend zijn door allerlei bijkomstige aspecten die menselijke structuren en relaties zo kenmerken, veronderstelt men. Weliswaar kunnen veel van de natuurlijke of cultuurhistorische ontwikkelingen beschreven worden in wiskundige termen – dit betekent niet dat die wiskundige termen omgekeerd weer bepaald worden door dit soort ontwikkelingen. Weliswaar kent de wiskunde als vak of kennisdomein een zekere ontwikkeling, maar deze staat los van de aard van die wiskunde zelf. Zo is het bijvoorbeeld niet nodig om te weten welke ontwikkelingen aan de introductie van de differentiaalrekening vooraf gingen. Soms kan het didactisch handig zijn om de ontwikkeling van de wiskunde te behandelen, maar meer dan een hulpmiddel zou dit niet zijn. Het geheel van de wiskunde zou een interne noodzakelijkheid bezitten die in de geschiedenis niet te vinden is. Structuren en resultaten in het ene wiskundige deelgebied zouden in andere deelgebieden hun geldigheid niet verliezen.

Cultuurgebondenheid versus universaliteit

In het verlengde van bovengenoemd onderscheid wordt meestal uitgegaan van de veronderstelling dat wiskunde zich bezighoudt met universeel geldige feiten. De relevantie van een cultuurgeschiedenis en ook het begrip daarvan lijkt daarentegen beperkt te zijn tot de onderhavige cultuur zelf. Natuurlijk kan iemand uit een andere cultuur (of periode) interesse voor en begrip hebben van een cultuurgeschiedenis, maar wat hij met die kennis kan beginnen is twijfelachtig. Hoe anders is dat wanneer iemand kennis maakt met een bepaald onderdeel van de wiskunde. Zowel het begrijpen als het gebruiken van wiskunde is ontheven van elke beperking. Wiskundige kennis lijkt een universele geldigheid te bezitten, die in principe voor iedereen inzichtelijk is en die bovendien welhaast universeel bruikbaar is. Anders ligt dat bij cultuurhistorische inzichten, waarbij het hoogst problematisch is om zo'n inzicht te gebruiken als leidraad voor menselijk handelen in andere omstandigheden en perioden. Zelfs beursfondsen waarschuwen dat 'behaalde resultaten in het verleden geen garantie zijn voor toekomstige resultaten'.

Natuurlijk is de wiskunde niet helemaal ontbloot van een cultuurhistorisch aspect, zoals elke scholier weet. Er bestaan immers verschillen tussen allerhande wiskundige getallenstelsels of talen, die zo hun eigen voor- en nadelen hebben. Het Romeinse gebruik van letters om getallen aan te duiden, bleek behoorlijk omslachtig en bovendien onhandig om wiskundige bewerkingen mee uit te voeren. Daarom hebben wij wel het Latijnse schrift, maar uiteindelijk Arabische cijfers en een Indiase nul in gebruik genomen in de wiskunde. Deze culturele en historische ontwikkeling blijkt echter niets af te doen aan de universele geldigheid van de wiskundige sommen die met die cijfers gemaakt kunnen worden. Integendeel: de universaliteit van de wiskunde lijkt juist bevestigd te worden door het feit dat vondsten uit verschillende culturen probleemloos met elkaar gecombineerd kunnen worden in die wiskunde. Datzelfde kan lang niet altijd van religieuze of literaire topoi gezegd worden. Blijkbaar is er iets eigenaardigs met die wiskundige vondsten aan de hand.

Kwaliteit versus kwantiteit

Veelal wordt dat eigenaardige van wiskundige vondsten toegeschreven aan het algemene onderwerp van de wiskunde: kwantiteit. Van oudsher gold de wiskunde als de wetenschap van maat en getal. Of het nou om oppervlaktes, hoeveelheden, verhoudingen of andere objecten gaat: in alle gevallen beschouwt de wiskunde die onderwerpen vanuit hun kwantitatieve aspect. Is het in de meeste gevallen onjuist om appels met peren te vergelijken, wanneer die vruchten puur naar hun getalsmaat of hun geometrische vorm worden vergeleken dan is dat geen probleem. Daarmee ziet een wiskundige benadering van die vruchten natuurlijk af van allerlei belangwekkende aspecten, anderzijds heeft die benadering daaraan haar universaliteit en 'ontijdelijkheid' te danken.

Zoals verschillende vruchten naar hun kwantiteit met elkaar vergeleken kunnen worden, zo kan men natuurlijk ook cultuurgeschiedenis beoefenen met behulp van kwantitatieve gegevens. Men kan bijvoorbeeld verschillende periodes van een bepaalde samenleving met elkaar vergelijken door demografische of economische cijfers te gebruiken. Of men kan verschillende samenlevingen aan de hand van dat soort cijfers naast elkaar zetten om te vergelijken. Onderzoekers van de 'Big History' – waarin de kosmische, biologische en menselijke samengevat worden – richten zich momenteel zelfs op een beschrijving van die geschiedenis puur in termen van de toenemende hoeveelheid energie die per fase door een bepaalde eenheid materie stroomt of verbruikt wordt.[1] Dit voorbeeld maakt duidelijk hoe de wiskunde alom bruikbaar kan zijn.

Maar tegelijk wordt duidelijk dat daarmee in hoge mate afstand genomen wordt van de eigenaardige kwaliteiten die culturen lijken te kenmerken, zoals machtsrelaties, religiositeit, kunstbeoefening, arbeidsdeling enzovoort. Om deze kwaliteiten te begrijpen moeten we talige of anderszins symbolische uitingen interpreteren, waarvoor vaak uitvoerige contextuele en ook historische kennis is vereist. Zo blijkt cultuurhistorisch onderzoek per se een moeizame aangelegenheid, die nooit tot een afronding kan komen. Hoe anders lijken wiskundige problemen te zijn: in principe is er een definitieve oplossing van (vrijwel) elke vergelijking mogelijk, zou de gevraagde maat of getal berekend moeten kunnen worden.

Open versus gesloten

Toch is noch de wiskunde, noch de cultuurgeschiedenis een afgesloten terrein van onderzoek. Er zijn eindeloos veel mogelijke berekeningen die gedaan kunnen worden, eindeloos veel structuren te ontwikkelen en beschrijven, zoals er ook eindeloos veel historische feiten zijn die beschreven en begrepen kunnen worden. In die zin geldt er openheid voor beide terreinen. Het verschil zit hem echter in de uitgangspositie: wat mag de cultuurhistoricus tot zijn domein rekenen en hoe dient hij (of zij, natuurlijk) dat te begrijpen? Alleen daarover al verschillen de meningen tussen collega's enorm. Hun terrein is dus van meet af aan onbepaald en staat open voor discussie. Een terrein waarop bovendien sinds kort ook biologen en ethologen zich begeven, nu die aannemelijk maken dat in het dierenrijk ook groepsgebonden culturele eigenschappen blijken voor te komen.

In dat opzicht hebben wiskundigen het bepaald eenvoudiger: zij bakenen om te beginnen hun domein af met definities van hun onderwerpen en axioma's over eigenschappen van die onderwerpen. In de wiskunde worden als het ware de spelregels ontworpen en vervolgens wordt het spel gespeeld. Elk spel kent weliswaar enorm veel variaties, maar de grenzen waarbinnen die variaties kunnen optreden, zijn van meet af aan bekend. De wiskunde lijkt zo een geslotenheid bij aanvang te bezitten, die de openheid bij de uitvoering niet in de weg staat.[2]

1.2 DE HISTORISERING VAN DE WISKUNDE

De oplettende lezer zal al gemerkt hebben dat de opgevoerde verschillen tussen cultuurgeschiedenis en wiskunde niet altijd zo scherp te stellen zijn. Zo blijkt de cultuurgeschiedenis soms haar voordeel te kunnen doen met wiskundige instrumenten. Daarnaast is het gestelde ideaalbeeld van de wiskunde met name in de laatste eeuw flink ondermijnd.

Dat ideaalbeeld had inmiddels een lange en eerbiedwaardige geschiedenis. Het werd in de antieke oudheid geformuleerd door vooral de wiskundige Euclides en de filosoof Aristoteles. In zijn algemeenheid bestaat dat ideaalbeeld van de wiskunde uit een stelsel van definities en uitgangspunten, waaruit vervolgens met logische noodzakelijkheid allerlei relevante uitspraken uit kunnen worden afgeleid. Zo begint boek I van de *Elementen* van Euclides met: '1. Een punt is datgene wat geen delen bezit' (Euclides, 1956, 6). Vervolgens geeft hij postulaten, bijvoorbeeld over de wijze waarop tussen twee punten een lijn getrokken kan worden. Daarna komen een aantal noties, die bijvoorbeeld nader toelichten hoe gelijke grootheden met elkaar vergelijkbaar zijn. Een dergelijk stelsel legt in aanvang zowel zijn inhoud als ook zijn afleidingsregels vast, waardoor volmaakte consistentie en juistheid kan worden bereikt. Deze euclidische of axiomatische methode, zoals gebruikt in de wiskunde, heeft een enorme invloed gehad op de geschiedenis van de wetenschap. Daarbij is ze niet alleen gebruikt als een soort hulpinstrument van wetenschapsbeoefening, maar heeft ze ook gefungeerd als een voorbeeld. Het 'more geometrico' – 'op de wijze van de (euclidische) geometrie' – poneren van wetenschappelijke kennis stond gelijk aan het bewijzen van de onomstotelijke waarheid ervan. Daarom werd dit voorbeeld niet alleen nagevolgd in de geometrie maar ook in bijvoorbeeld de logica, de metafysica en zelfs de fysica. Natuurlijk moet in al die gevallen aan het begin worden geformuleerd welke elementen, beginselen het onderwerp zijn van zo'n stelsel. Men ging er echter vanuit dat ook op andere terreinen dat soort elementaire en evidente uitgangspunten gevonden konden worden. Sterker nog, er zijn ook pogingen geweest om een enkele maar alomvattende wetenschap te formuleren en die zijn meestal op een axiomatische leest geschoeid geweest. Niet de minste namen zijn verbonden aan pogingen om een of meerdere wetenschappen te voorzien van een axiomatisch-deductieve structuur. Zo hebben bijvoorbeeld Descartes, Hobbes, Spinoza, Newton, Hilbert, Peano, Russel en Von Neuman werken gepubliceerd waarin zij de gehele filosofie, dan wel de fysica, rekenkunde, logica of bijvoorbeeld de kwantummechanica op een dergelijke leest wilden schoeien.

Zonder op de details van de grondslagencrisis in de wiskunde en de voorbodes daarvan in te gaan (daarop wordt elders in dit boek ingegaan) moet erop gewezen worden dat er in elk geval twee soorten van ondermijning van dit ideaalbeeld geweest zijn. In de negentiende eeuw bleek het al mogelijk om verschillende axiomatische stelsels te formuleren, die in hun resultaten niet met elkaar te verenigen bleken. Bekendst is natuurlijk dat een euclidisch en niet-euclidisch stelsel kon worden opgesteld, waardoor bijvoorbeeld driehoeken met tegenstrijdige eigenschappen werden gedefinieerd: bij Euclides is de som der drie hoeken van een driehoek altijd 180 graden, bij alternatieve stelsels kon die som meer of minder dan 180 graden zijn.

Vervolgens werden er verschillende pogingen ondernomen om deze alternatieve stelsels op hun beurt te funderen in een enkele wiskundige logica, die natuurlijk wel intern consistent zou moeten zijn. Een andere reddingspoging – ondernomen door de Nederlandse wiskundige Brouwer – probeerde de logica en de fundering van de logica te herzien, waardoor dit soort contradicties niet meer zo desastreus hoefden te zijn. Dit zogeheten intuïtionisme heeft echter maar beperkte aanhang gekregen. De meeste hoop was gericht op de redding door middel van een aanvullend logisch of formeel systeem. De genadeklap voor deze verhoopte oplossing kwam toen Kurt Gödel in de jaren 1930 met zijn befaamde 'onvolledigheidsstelling' bewees, dat elk wiskundig stelsel dat niet tot contradicties leidt voor zijn bewijs een beroep moet doen op een ander stelsel – kortom, er bestaat geen wiskundig consistent stelsel dat zichzelf kan funderen en bewijzen.

Hoe zeer deze problemen en de ondernomen oplossingen het werk van wiskundigen in die tijd beïnvloed heeft, blijkt wel uit de bekentenis van de eminente wiskundige, kwantumtheoreticus en speltheoreticus – en axiomatiseerder! – John von Neumann in zijn opstel 'The Mathematician':

> I know myself how humiliatingly easily my own views regarding the absolute mathematical truth changed during this episode, and how they changed three times in succession! (In: Newman, 1988).

Natuurlijk hebben deze problemen de ontwikkeling en groei van de wiskunde niet tegengehouden, integendeel. Wel hebben ze geleid tot een andere visie op de wiskunde, ook in de ogen van wiskundigen zelf. Kort samengevat komt het erop neer dat de wiskunde meer een 'gewone' wetenschap is geworden, die veel eigenschappen deelt met wetenschappen zoals de natuurkunde of zelfs de sociale wetenschappen. Net zoals voor die wetenschappen geldt, blijkt ook voor de wiskunde niet alleen maar sprake te zijn van een gestage groei van kennis, die de eerder verworven kennis intact laat. Niet alleen de geschiedenis van de wiskunde moet regelmatig herschreven worden, omdat er nieuwe kennis en inzichten zijn opgedaan. Ook de stellingen of resultaten van de wiskunde zijn soms onderhevig aan veroudering en moeten herzien worden. Enkele van deze punten en nog andere worden beschreven door Michael J. Crowe in zijn 'Ten Misconceptions about Mathematics and Its History'.

Zo blijken de hierboven behandelde tegenstellingen tussen cultuurgeschiedenis en wiskunde niet geheel op te gaan. De waarde van een cultuurgeschiedenis van de wiskunde is dan ook meer dan slechts anekdotisch of didactisch. Zo'n cultuurgeschiedenis kan enkele wederzijdse invloeden van culturele en wiskundige ontwikkelingen tonen, maar daarnaast ook een completer beeld schetsen van wat de wiskunde is en wat de wiskunde aan mogelijkheden en beperkingen biedt.

Opvattingen over de mogelijkheden en beperkingen van de wiskunde hangen uiteindelijk ook af van opvattingen over de aard van het wiskundige object en de soort kennis die wij van dat object hebben. Meestal worden deze niet expliciet aan de orde gesteld. Omdat het behulpzaam kan zijn om die posities enigszins te kennen en dus ook verderop te herkennen, zal ik in dit hoofdstuk ingaan op de ideeën van Plato en Aristoteles. Deze zijn nogal verschillend van elkaar en hebben allebei een grote invloed gehad op de latere opvattingen omtrent het wiskundige object. Zij hebben als het ware de concepten geleverd waarmee vervolgens meestentijds over de wiskunde gedacht werd.

Hoe verschillend hun opvattingen ook waren, zij leken het echter wel eens te zijn over de gebrekkige toepasbaarheid van de wiskunde op de kennis van de natuur: juist de formele exactheid van de wiskunde maakte haar onbruikbaar voor het kennen van de dynamische en materiële natuur. Voor het ontstaan van een mathematische natuurwetenschap moest dan ook het begrip van de wiskunde aangepast worden. Een auteur die dit op een heldere manier gedaan heeft en indirect ook van invloed is geweest op de ontwikkeling van de 'scienza nuova' is de wiskundige, theoloog en filosoof kardinaal Nicolaus von Kues, ook wel Cusanus geheten. Aan Cusanus zal ik dan ook als derde auteur wat uitgebreider aandacht besteden.

Hopelijk zullen Plato, Aristoteles en Cusanus na lezing van dit boek niet alleen interessante personages blijken te zijn voor een cultuurgeschiedenis van de wiskunde, maar bieden zij instructieve posities die nog steeds te denken geven ten aanzien van de wiskunde.

1.3 DE AANTREKKINGSKRACHT VAN HET PLATONISME OF IDEALISME IN DE WISKUNDE

De hierboven geconstrueerde tegenstelling tussen cultuurgeschiedenis en wiskunde kent een lange geschiedenis. In feite gaat ze voor wat betreft de opvattingen over de wiskunde terug tot de antieke oudheid en vinden we ingrediënten ervan in Plato's dialogen. In die dialogen wordt aan de wiskunde – meestal in de gedaante van rekenkunde of meetkunde – regelmatig respect betoond, dat veelal te maken heeft met genoemde ingrediënten. In *De Wetten* wordt zelfs onomwonden door de Athener betoogd:

> Want met het oog op de huishouding, op de staatsinrichting, op alle kunsten, bezit geen enkel leervak zo grote opvoedkundige waarde als de studie der getallen. Het voornaamste is wel dat zij de slaperige, van nature domme geesten wakker schudt en hen goedleers, flink van geheugen en schrander maakt en dat ze hen, dank zij het goddelijke dat er in die kunst zit, boven hun eigen natuur doet uitgroeien (V, 747 b; vert. X. de Win, 1980).

Dat dit niet alleen voor de getalsleer maar ook voor de geometrie geldt, blijkt uit de dialoog *De Staat*, waarin de meetkunde gelijk wordt gesteld aan 'kennis van het eeuwig zijnde', die volgens Socrates 'de ziel naar de waarheid zal trekken en de wijsgerige gezondheid doen ontstaan met de bedoeling dàt naar omhoog te richten wat we nu verkeerdelijk naar beneden houden' (VII, 527 b, ibid.).

Volgens deze visie richt de wiskunde zich op het eeuwig en onveranderlijke zijnde, bezit ze daarom ook iets goddelijks en stelt ze mensen in staat om hun afgestompte geest te verbeteren en zich omhoog te richten. De wiskunde laat in Plato's visie niet toe dat men bij bewijsvoeringen aan komt zetten met getallen die gerelateerd zijn aan zichtbare of tastbare objecten (*De Staat*, VII, 525 d). In elk geval bezit de wiskunde zo een opvoedkundige waarde ten opzichte van alle kunsten of kundigheden. Bovendien is de wiskunde blijkbaar behulpzaam bij het bereiken van de waarheid door de ziel.

Deze opvatting heeft – waarschijnlijk in het Platonisme – geleid tot het gerucht dat boven de ingang van Plato's Academie te lezen zou zijn geweest: 'αγεωμετπητοσ μηδεισ εισιτω', ofwel 'Niemand zonder kennis van de geometrie mag binnenkomen'. Dit opschrift komt voor het eerst ter sprake in een manuscript, zo'n 800 jaar na Plato's dood.[3] Dit opschrift bestond waarschijnlijk nog niet tijdens Plato's leiderschap van de Academie, omdat Aristoteles er dan wel naar verwezen zou hebben. Aristoteles was namelijk zeer kritisch ten aanzien van de overheersende positie van de wiskunde in de filosofie van de Academie.

Een dergelijke toelatingseis doet denken aan de groep der Pythagoreeërs, die reeds voor Plato aan de wiskunde een metafysische betekenis toekenden. Deze groep was geïnteresseerd in de wiskunde, omdat ze meende via wiskundige inzichten kennis te maken met de eeuwige en onveranderlijke structuur van de werkelijkheid. Harmonische verhoudingen in de muziek, astronomische bewegingen, driehoeksmaten: 'αριθμωι δε τε παντ'εοικεν', alles komt overeen met het getal (Iamblichos, 1987, pp. 147-147). In zekere zin kan alles beschouwd worden als een getal, omdat een getal overal op kan slaan en bovendien elk getal gerelateerd kan worden aan elk willekeurig ander getal. Zo laat de hele werkelijkheid zich getalsmatig kennen en ook vanuit één gezichtspunt beschrijven.

Daarmee werd dus al in de vijfde eeuw voor onze jaartelling een metafysica opgesteld die had kunnen bijdragen aan een mathematische natuurwetenschap. Het heeft echter om verschillende redenen nog lange tijd geduurd voor het zover was. Ten eerste ontdekten de Pythagoreeërs dat er ook zogenaamde 'irrationale getallen' bestaan, die niet in de kosmos thuis leken te horen, zoals de $\sqrt{2}$. Zo'n irrationaal getal is immers niet uit te drukken als de verhouding tussen twee natuurlijke getallen.[4] Hoe sektarisch de Pythagoreeërs hebben geopereerd en welke rol de wiskunde in die 'sekte' speelde, blijkt wel uit de anekdote dat de persoon die dit inzicht bekend maakte in zee geworpen werd (Iamb. Vit. Pyth 247; DK 18.4). Ten tweede gingen zij zover dat ze aan de getallen ook allerlei niet-mathematische eigenschappen toekende. Volgens deze getalsmystiek bezitten getallen bijvoorbeeld ook rechtvaardigheid of volkomenheid.

Aan een dergelijke mystieke verering van wiskundige objecten bezondigde Plato zich niet. Helaas ging hij zelfs verder dan alleen het negeren van mystieke eigenschappen van getallen. Hij bracht namelijk de wiskunde onder in een afgescheiden en ideële sfeer van de werkelijkheid. Daarmee creëerde Plato een kloof tussen de wiskunde en mogelijke toepassingen van de wiskunde in de empirische natuurwetenschap.

Toch laat Plato ene Timaeus in zijn gelijknamige dialoog, verhalen van een God die, als een ambachtsman, gebruik gemaakt heeft van vormen en getallen bij de ordening van het heelal zoals hij dat aantrof. In dit model zijn veel wiskundige vormen en verhoudingen verwerkt, waarmee Plato zowel astronomische, natuurkundige als ook biologische ordeningen omschrijft. In deze dialoog worden ook de geometrische figuren genoemd waaruit – opgehoopt in grote getale – alle stoffelijke lichamen bestaan. Wiskundige objecten als een model voor de ordening van de kosmos en volgens het verhaal zelfs voor de onzichtbare deeltjes die samen de materie vormen: deze ideeën hadden aanleiding kunnen zijn voor het ontstaan van een wiskundige natuurwetenschap. Het feit dat de *Timaeus* tot in de twaalfde eeuw de enige volledig bekende dialoog van Plato was, had daar ook aan kunnen bijdragen – nog op de bekende schildering van de Atheense school, door Rafaël in 1504 geschilderd, loopt Plato met de *Timaeus* in zijn armen.

Toch heeft Plato niet werkelijk een aanzet tot een dergelijke natuurwetenschap gegeven. Dit is vooral te wijten aan zijn overtuiging dat het empirische gedeelte van zo'n wetenschap roet in het eten gooit. Zo wijst Socrates de toegepaste wiskunde inderdaad af wanneer hij opmerkt dat – zoals de Pythagoreeërs dat al deden in de harmonieleer – de astronoom 'zijn tijd en moeite verliest door onderlinge opmetingen' (*De Staat* VII, 531 a).[5] De 'status aparte' van wiskundige objecten maakte het niet alleen onnodig, maar ook onzinnig om empirisch onderzoek te doen naar wiskundige maten of structuren in de empirische werkelijkheid. Empirisch onderzoek zou immers geen kennis van de wiskunde op kunnen leveren en omgekeerd zouden wiskundige inzichten slechts beperkte relevantie bezitten voor werkelijke kennis. Dit laatste heeft te maken met het feit dat wiskunde berust op een aantal hypothesen en daardoor niet zulke absolute kennis kan bereiken als de dialectische methode, zoals Socrates die bepleit.[6] Al met al is voor Plato de wiskunde een stap op weg naar ware kennis, omdat ze niet meer gerelateerd is aan zintuiglijke kennis.[7] Aan de ander kant schiet de wiskunde wezenlijk te kort, omdat ze berust op een aantal hypotheses en zo geen absoluut ware kennis oplevert.

1.4 HET PROBLEEM VAN DE EMPIRISCHE HERKOMST VAN MATHEMATICA BIJ ARISTOTELES

Ondanks deze tegenwerpingen heeft Plato's idealisme betreffende de wiskundige objecten een grote aantrekkingskracht uitgeoefend in de geschiedenis van de wiskunde. De metafysische aanname van een afgescheiden domein van wiskundige objecten leek een aantal (vermeende) eigenschappen van de wiskunde te verklaren, zoals de niet door paradigmawisselingen geplaagde groei van de wiskunde, de formele consistentie van de traditioneel wiskundige systemen en de universele geldigheid ervan. Toch levert dit metafysische uitgangspunt ook een aantal problemen op. Dan bedoel ik nog niet eens de structurele of formele problemen waar hierboven op is gewezen. Het metafysische uitgangspunt levert namelijk ook een metafysisch probleem op: hoe kunnen de objecten en structuren van een afgescheiden domein als de wiskunde, ook toepasbaar zijn op objecten en structuren van andere domeinen zoals de fysica? Dit probleem is op klassieke wijze verwoord als 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences' met het dictum: 'Het mirakel van de geschiktheid van de taal van de wiskunde voor het formuleren van de natuurkundige wetten is een wonderbaarlijk geschenk dat we begrijpen, noch verdienen'.[8]

Filosofisch is dat natuurlijk een zeer onbevredigend antwoord en komt het neer op een vorm van dualisme. Elk dualisme lijkt onbevredigend, omdat we dan erin moeten berusten dat de werkelijkheid blijkbaar uit een aantal totaal van elkaar afgescheiden domeinen bestaat. Dit geldt met name wanneer het ene domein, dat van de natuur, zich bijvoorbeeld redelijk laat beschrijven in termen van het andere domein, dat van de wiskunde.

Dit soort vragen en het probleem van het dualisme zijn voor Aristoteles belangrijke drijfveren geweest bij zijn kritiek op Plato. Hij stelt bijvoorbeeld dat dualisten, zoals Plato, niet genoegen kunnen nemen met een sfeer van ideële en afgezonderde mathematische objecten enerzijds, en een sfeer van materiële, waarneembare lichamen anderzijds, maar dat ze ook nog een tussenvorm moeten veronderstellen van belichaamde mathematische objecten (*Metaf.* M, 2, 1076 b 16). Wellicht doelt hij hier op een soort tussenvorm van toepasbare wiskundige objecten en vraagt hij zich af hoe deze te vergelijken zouden zijn met 'zuiver' wiskundige objecten. Ondanks zijn kritiek op de platonische benadering, maakt Aristoteles de wiskunde niet tot een empirische wetenschap. Zo'n visie zou een volslagen spiegelbeeld zijn van het formele, axiomatische systeem van wiskunde zoals dat hierboven beschreven werd en dat met name geassocieerd wordt met de naam van Euclides. Opmerkelijk genoeg is het echter Aristoteles geweest, die een beschrijving heeft gegeven van een axiomatisch-deductief systeem van redeneren in de wetenschap – nog voor Euclides[9] zijn *Elementen* opstelde.[10] Dit is opvallend omdat over het algemeen quasi-empirische en Euclidische theorieën tegenover elkaar worden gesteld.[11]

Aristoteles wil op de twee belangrijkste problemen omtrent de wiskunde een antwoord bieden: enerzijds wil hij de toepasbaarheid van wiskundige kennis op de empirie verklaren, anderzijds wil hij de niet-toevallige aard van de wiskundige waarheden funderen. Hij kan de wiskunde dus niet tot een volslagen empirische wetenschap bestempelen. Zijn benadering wordt dan ook geleid door een gemengde strategie, deels kentheoretisch, deels meer formeel van aard.

De kentheoretische vraag betreft de herkomst van wiskundige objecten in de menselijke geest. In dit verband wijst Aristoteles op het vermogen tot abstractie: van de materiële en zintuiglijke objecten worden wiskundige eigenschappen afgeleid door alle andere eigenschappen te negeren, zoals hun wezenlijke en hun materiële eigenschappen. Zo verliest een ronde zalfdoos zijn schoonheid, zijn functionaliteit en zijn materialiteit. Wat overblijft, zijn aspecten van grootte en telbaarheid (*Metaf.* 1077 b 1722). En van een bronzen kogel kunnen we met onze abstraherende geest een cirkel afleiden.[12]

Nu beseft Aristoteles goed dat we zo'n wiskundig object en onze manipulaties daaromtrent niet moeten laten afhangen van de eigenschappen van het oorspronkelijke object, zoals een bronzen kogel. Theorema's over de structuur van de cirkel zijn immers geen empirische uitspraken. In het vervolg op de kentheoretische activiteit van de abstractie vindt er nog een ontologisch opmerkelijk productiviteit plaats: 'men onderzoekt een dergelijk object het best indien men datgene wat geen zelfstandige realiteit heeft, als zelfstandig poneert, zoals de arithmeticus en de geometer doen' (*Metaf.* 1078 a 21).

Hoe kun je een zelfstandig (niet-empirisch) domein maken van iets dat geen eigen zijnssfeer bezit – zoals Plato meende? Wiskundigen doen dat door middel van de definities, postulaten en overige uitgangspunten die tot een axiomatisch-deductief stelsel leiden. De definities van punt, getal, ongelijkheid, enzovoort hebben dus misschien wel een kentheoretische oorsprong in de abstractie, maar construeren met elkaar een eigen domein dat niet meer afhankelijk is van die abstractie. Dat domein is op deze manier zelfstandig en bestaat dan ook afgezonderd van andere domeinen en is daarbij primair op zichzelf betrokken. De geometer heeft volgens Aristoteles dus gelijk om aan zijn domein realiteit toe te kennen.[13] Die realiteit is dus beslist niet afhankelijk van een platonische 'wereld van ideeën', waartoe wij middels een bijzondere vorm van intuïtie toegang zouden hebben. Dat domein wordt daarentegen door ons geconstrueerd terwijl het toch 'hylikoos' (υλικως)[14] kan zijn, waarbij het opmerkelijke is dat die 'materialiteit' ook tegelijk 'potentialiteit' betekent: geometrie gaat over de materialiteit van objecten, maar daarmee tegelijk ook in potentie over alle mogelijke objecten.[15] Vandaar dat de wiskundige wetenschappen zelfs over het schone en goede zouden kunnen gaan. Immers, het schone en goede hebben ook te maken met zaken als orde, proportie, bepaaldheid – onderwerpen van de wiskunde. Toch heeft Aristoteles de stap naar een 'mathesis universalis' helaas niet gemaakt, zoals we verderop zullen zien.

Middels abstractie afgeleid en dan geconstrueerd tot een zelfstandig domein dat ook toepasbaar blijkt in empirische kennis: dit is de ontwikkeling van de wiskundige objecten die Aristoteles moest aantonen. Hiermee samenhangende aspecten behandelt hij op verschillende plaatsen: in de metafysica gaat het dan om de ontologische status van die objecten, in zijn 'psychologie' over de relevante vermogens van de ziel. Interessant genoeg behandelt hij slechts kort het proces van abstractie aan het eind van zijn wetenschapstheoretische geschrift *De Analytica Posteriora*. Daar vormt die leer van de abstractie het sluitstuk van zijn omschrijving van de axiomatische methode als wetenschapsleer.

Blijkbaar is het voor Aristoteles volledig acceptabel om een wetenschapsleer te geven die zich vooral richt op interne consistentie en coherentie, terwijl de empirische of objectieve geldigheid niet door die wetenschapsleer zelf gegarandeerd kan worden en dus een beroep lijkt te doen op dat voorafgaande proces van abstractie. Die consistentie en coherentie van een wetenschap wordt gegarandeerd door principes, die zelf niet bewijsbaar zijn omdat ze juist ten grondslag liggen aan elke vorm van bewijs. Het gaat hierbij voornamelijk om de axioma's, of de 'gemeenschappelijke zaken', of de 'gemeenschappelijke meningen' (κοιναι δοξαι) zoals de wet van de uitgesloten derde of het uitgangspunt dat wanneer we van een even getal een even getal aftrekken, er een even getal overblijft. Naast deze algemene axioma's of bewijsprincipes moet zo'n axiomatische wetenschapsleer meer disciplinegebonden, specifieke definities en postulaten omvatten.[16] Die specifieke definities zijn voor de getalsleer of de geometrie weer anders dan voor een andere wetenschap. Voor de natuurwetenschap, meteorologie, retorica, metafysica, et cetera moeten steeds definities van het betreffende domein worden opgesteld als uitgangspunten van die wetenschappen.[17] Implicatie hiervan lijkt echter te zijn, dat er geen 'transdisciplinaire' wetenschap zoals de wiskunde kan bestaan. Omdat de 'hyle' of materie van een object van onderzoek geen wezenlijke kennis op kan leveren, is volgens Aristoteles een wiskundige benadering van dat object ook weinig zinvol.

1.5 WISKUNDIGE TOENADERING TOT DE EMPIRIE? KARDINAAL CUSANUS SCHIET TE HULP

Hoe invloedrijk de opvattingen van Plato en Aristoteles ook geweest zijn, ze hebben geen directe impuls gegeven tot de ontwikkeling van een 'mathesis universalis.' De eerste had immers de wiskundige objecten ondergebracht in een aparte zijnssfeer en de ander achtte die objecten slechts relevant voor een zeer beperkt en onwezenlijk aspect van de werkelijkheid. Natuurlijk heeft dat zelfs in de Oudheid een wiskundige en ingenieur avant la lettre als Archimedes er niet van weerhouden om op wiskundige wijze al menig natuurkundige wetmatigheid te geven. Inmiddels is de mathematisering van de wetenschap doorgedrongen tot werkelijk elke discipline: van genetica tot kwantummechanica, van sociologie tot systeembiologie. Die mathematisering zou echter waarschijnlijk eerder tot stand zijn gekomen als het denken over wiskunde na Plato en Aristoteles snellere ontwikkelingen had gekend.

Dan hadden we wellicht eerder kennis kunnen maken met 'Wiskundige Grondbeginselen van de Natuurfilosofie'. Nu kwam Newton met zijn maatgevende *Principia* pas in 1687. Zoals uit de titel al blijkt, behoren volgens Newton wiskunde en natuurwetenschap of wetenschapsfilosofie niet meer tot wezenlijk verschillende domeinen die zich moeilijk laten verenigen. Integendeel, de kennis van de natuur kan opgebouwd worden vanuit wiskundige grondbeginselen.[18] Het is evident dat tussen deze positie en de uitgangspunten van Plato en Aristoteles een behoorlijke kloof ligt die overbrugd diende te worden. Die brug bestaat niet zozeer uit wiskundige middelen, als wel uit andere begrippen van de natuur, het verstand, denken, wiskundige objecten en wetmatigheden. Hieraan hebben denkers van zeer uiteenlopende snit bijgedragen.

Om zichtbaar te maken welke denkstappen zoal gemaakt zijn, zal ik hieronder kort ingaan op een denker uit onverwachtse hoek: de theoloog, filosoof, wiskundige en kardinaal Nicolaus von Kues, ofwel Cusanus (1401-1464). De invloed van diens denkbeelden is moeilijk vast te stellen, hoewel 'er een omwenteling in het denken teweeg zou zijn gebracht, wanneer zij in de vijftiende eeuw door de beoefenaars van de vakwetenschappen waren overgenomen en in practijk gebracht' (Dijksterhuis 1950, p. 248). Wellicht is die invloed via een niet altijd zichtbare route verlopen maar hij is wel op invloedrijke plaatsen gearriveerd: 'jene Richtung der Naturbetrachtung, die, von Cusanus anhebend, über Leonardo da Vinci zu Galilei und Kepler weiterführt' (Cassirer, 1927). Een route die niet zozeer via dan nog jonge academies, universiteiten en theologische disputen verlopen is, maar langs een aantal van die breed geïnteresseerde en actieve personen die de Renaissance kenmerkt. In elk geval is het wetenschappelijke en wiskundige werk van Cusanus niet zozeer onder theologen en filosofen bekend, maar juist wel onder wetenschappers en wiskundigen, zoals blijkt uit het werk van bijvoorbeeld Descartes, Leibniz, Walter Raleigh en ook de Nederlander Christiaan Huygens. Het is dan ook niet zonder betekenis dat kardinaal Cusanus in verschillende dialogen een Leek aan het woord laat, die met zijn gezonde lekenverstand vaak dichter bij de waarheid komt dan de filosoof of redenaar die ook ter sprake komen.

In het denken van Cusanus over wiskunde vinden we een originele combinatie van aandacht voor de relatie tussen wiskunde en het menselijk kenvermogen enerzijds, en voor de metafysische status van de wiskundige objecten anderzijds. Over het menselijke verstand is Cusanus wel heel duidelijk: bij monde van de Leek betoogt hij dat het woord 'mens' van het woord 'mensurare' afgeleid is, dat 'meten' betekent (*De Mente*, I, p. 208). Die menselijke geest omschrijft Cusanus in analogie met de productieve geest van de Schepper: 'Het begrijpen door de goddelijke geest is het scheppen van de dingen; het begrijpen door onze geest is het begrip van de dingen' (*De Mente*, II, p. 220). Onze geest is verwant aan de goddelijke geest en kan via een soort aanpassing, assimilatie, zich een beeld vormen van de producten van die goddelijke geest. Wat in die goddelijke geest nog volledig samengebald aanwezig is, wordt in onze geest en de veelheid van diens beelden en begrippen weerspiegeld. Hierbij is volgens Cusanus geen sprake van abstractie die de begrippen en ook wiskundige concepten afleidt uit de natuur, zoals we bij Aristoteles tegenkwamen. De zintuiglijke wereld geeft de aanvankelijk slapende geest een zet om in beweging te komen, waarna die geest in zichzelf gelijkenis van alle geschapen dingen kan vinden. Die gelijkenis is daar door God als op een levende spiegel achtergelaten, zoals hij bijvoorbeeld deed met de maatverhoudingen bij de schepping van de hemel (*De Mente*, p. 232).

Dat verhoudingen of proporties van belang zijn voor het kennen van de werkelijkheid, leek ook Aristoteles al te beseffen, zoals we in het voorafgaande zagen. Toch bleef ook voor Aristoteles de wiskunde gericht op de (denkbare) materialiteit van de dingen en daardoor wezenlijk verschillend van de substantiële kennis, waarop wetenschap zich zou moeten richten. Plato en Aristoteles waren zich met betrekking tot kennis ook bewust van het belang van de relatie tussen de veelheid van dingen en waarnemingen enerzijds, en de 'samenvatting' van die veelheid in simpele begrippen, getallen of geometrische vormen anderzijds. Voor hen was die relatie problematisch, terwijl de Leek van Cusanus in dit verband een simpele maar doeltreffende stap neemt: 'het eerste oerbeeld, 'exemplar', in de geest van de Schepper is het getal. […] Vandaar dat het getal het voortreffelijkste pad is om tot wijsheid te komen' (*De Mente*, 238). Waren voor Plato en Aristoteles de wiskundige objecten nog van secundair belang en moest kennis van de werkelijkheid vooral gebruik maken van woorden, begrippen en definities, bij Cusanus krijgt het getal juist een dergelijke cruciale functie toegemeten! Het is dan ook niet verwonderlijk dat de Leek met enig respect over de Pythagoreeërs spreekt.[19] Het getal, waarmee alle mogelijke verhoudingen en ook eenheid en veelheid zich zo goed laten uitdrukken, vormt de brug tussen de scheppende en denkende geest, tussen de geschapen veelheid en de scheppende eenheid.[20] Deze functie wordt ondersteund door het inzicht dat God bij de schepping van de wereld 'aritmetica, geometrie, muziek en tegelijk ook astronomie heeft toegepast. Van deze kunsten bedienen wij ons ook, wanneer we de relaties tussen de dingen en van hun elementen en van de beweging onderzoeken' (*De doct.ign.* II, 13). Cusanus verbindt dus ideeën over de productiviteit van de menselijke geest, de aanpassingsrelatie aan de geest van de Schepper en een bepaalde ontstaansmetafysica zodanig met elkaar, dat de status en de geldigheid van de wiskunde enorm aan belang kan winnen.

Interessant hierbij is het gegeven dat Cusanus niet alleen vanuit theologische overwegingen tot deze positie kwam. Opmerkelijk genoeg ging er ook van de wiskunde waarmee hij zich bezighield een invloed uit op deze metafysische gedachten. Cusanus schreef meerdere traktaten over de wiskunde, waaronder *De Mathematica Perfectione* en *De Circuli Quadratura*. Wiskunde figureert dus niet alleen als een terzijde in de vorm van metaforen en voorbeelden in zijn werk, maar krijgt ook afzonderlijke aandacht. Die aandacht richtte zich voornamelijk op klassieke, wiskundige problemen als de kwadratuur van de cirkel en de bepaling van het getal π.

Nu was het beslist niet gebruikelijk dat geleerden, laat staan theologen, zich destijds met wiskunde bezighielden. Immers, hoewel men graag de wijsheid van Salomo (11, 21): 'Omnia in mensura et numero et pondere deposuisti' citeerde – God heeft alles in maat, getal en gewicht geponeerd – toch had de menselijke geest geen toegang tot deze precieze getallen. Onze ontoereikendheid, onze wezenlijke 'andersheid' vergeleken met Gods geest maakte dat het zoeken naar wiskundige kennis eigenlijk een futiele aangelegenheid was. Sterker nog, een dergelijke curiositas kon makkelijk tot 'onvrome overmoed' leiden, zoals Augustinus vermaande (*Confess*. V, 3).

Om kort te gaan: zowel vanuit de antieke wijsbegeerte als vanuit de latere christelijke theologie bestond een grote reserve ten aanzien van wiskundige kennis van de werkelijkheid. Wetenschappers en theologen richtten zich eerder op conceptueel (verbaal) inzicht in de wezens van de afzonderlijke materiële zijnden of wijdden zich aan theologisch inzicht in de absoluut unieke aard van de Schepper. Wiskunde vormde zo een onbelangrijke nevenactiviteit van wetenschappers en theologen. Nu handhaaft Cusanus vanzelfsprekend ook een verschil tussen wiskunde en theologie, tussen kennis van de schepselen en kennis van de Schepper. Hij omschrijft die verschillen echter ook in wiskundige termen, waarmee hij de wiskunde een centralere plaats in dit verband geeft.

Met behulp van de wiskunde schetst Cusanus een relatie tussen schepselen en de Schepper als volgt: omdat de schepselen veranderlijk zijn en vanwege hun relationaliteit ook variërend in grootte, lijken ze onvergelijkbaar met de onveranderlijke en onbepaalbare Schepper. Cusanus suggereert echter een vergelijking tussen beide als tussen een kromme en een rechte lijn: een kromme lijn kan sterker of minder gebogen zijn, terwijl een rechte lijn niet een dergelijke variatie toelaat (*De doct.ign*. I, 13-16). Lijkt het hier te gaan om een wezenlijk onderscheid tussen schepsel en Schepper, in een andere visie op dergelijke figuren gaat Cusanus die relatie nog anders bepalen: wanneer we bijvoorbeeld een kromme of cirkel oneindig groot denken, 'limietloos', dan neemt de kromming af en zal die kromme uiteindelijk samenvallen met de rechte lijn. Wat wezenlijk verschillend leek, blijkt – wanneer de variatie tot in het oneindige wordt voorgesteld – juist overeenkomstig met elkaar; schepsel en Schepper kunnen toch in relatie tot elkaar worden gedacht.

Zonder hier in te gaan op het gebruik van het complexe begrip van het oneindige door Cusanus, is het belangrijk om te beseffen dat hier een cruciale denkbeweging wordt gemaakt. Onder erkenning van de eigenheid van de sfeer der schepselen ten opzichte van de Schepper blijkt de wiskunde toch een manier te bieden om de relatie tussen beide te denken. Daarbij blijft weliswaar een verschil tussen beide sferen bestaan, maar dat wordt ook in wiskundige termen omschreven. Wezenlijk daarvoor is dat in een wiskundige benadering onvolledigheid en onnauwkeurigheid geen redenen meer vormen om die wiskunde als geheel af te wijzen, integendeel. Elders maakt Cusanus bijvoorbeeld ook gebruik van de zogenaamde exhaustiemethode om het oppervlak van een cirkel te bepalen. Deze methode werd al in de Oudheid, onder andere door Archimedes, ontwikkeld en bestaat uit het intekenen van steeds meer driehoeken of rechthoeken in een cirkel of kromme. Op die manier kan steeds nauwkeuriger het oppervlak binnen de kromme worden bepaald, hoewel het bij een benadering blijft.

In het *Compendium*, dat waarschijnlijk uit zijn sterfjaar stamt, geeft Cusanus een intrigerende metafoor waarin dit element van toenemende nauwkeurigheid gecombineerd wordt met een uitgesproken empirische houding. Het gaat om de vergelijking van de mens als 'animal perfectum' – want uitgerust met zintuigen en intellect – met een kosmograaf die een kaart van de wereld fabriceert (*Comp*. VIII). Daartoe gebruikt de kosmograaf de berichten van zijn zintuigen, die hem alle mogelijke informatie over de wereld bieden. Die berichten gebruikt hij ook om zijn kaart steeds preciezer en waarachtiger te maken. De ordening en verwerking van die informatie vindt echter plaats in zijn intellect, waarmee hij zich in een soort afbeeldingsrelatie tot de geest van de Schepper bevindt: de geestelijke creativiteit van de kosmograaf is een afspiegeling van de productiviteit van de geest van de Schepper.[21] Hier is dus geen sprake van een waardeloze, onnauwkeurige kennis die voortvloeit uit de onvrome overmoed van een wezenlijk tekortschietende, menselijke geest. Integendeel, met een toenemende nauwkeurigheid kan een beeld van de wereld geschapen worden dat direct verwijst naar de productiviteit van de goddelijke geest, die de bron van die wereld is – inclusief de afbeelding ervan. Dat een dergelijke visie opgang maakte in de moderne wetenschap moge blijken uit Newtons opmerking:

> … that I might show that the analogy between the divine faculties and our own may be shown to be greater than has formerly been perceived by philosophers. That we were created in God's image, holy writ testifies. And his image would shine more clearly in us if only he simulated in the faculties granted to us the power of creation in the same degree as his other attributes (Newton: ed. A. Janiak, 2004, p. 30).

1.6 WISKUNDE: EEN CULTUURGESCHIEDENIS?

Net als over Plato en Aristoteles, valt er ook over Cusanus veel meer te zeggen – alleen al over diens opvattingen over de wiskunde. Toch hoop ik voor het onderhavige kader duidelijk te hebben gemaakt welke conceptuele stappen Cusanus gemaakt heeft en hoe dergelijke stappen de status van de wiskunde als (hulp-)wetenschap enorm vooruit geholpen hebben. Hoewel de invloedsfeer van Cusanus moeilijk vast te stellen blijkt, heeft zijn werk bijgedragen aan de bestrijding van bezwaren tegen de onnauwkeurigheid van de wiskunde en tegen het feit dat wiskundige kennis slechts over de materialiteit van de dingen zou gaan of juist alleen over ideëele objecten. Wiskunde als wetenschap van het getal en van de relaties tussen getallen is volgens Cusanus bij uitstek geschikt om de werkelijkheid mee te leren kennen. Hoewel hij zelf waarschijnlijk in beperkte mate aan onderzoek heeft gedaan, onder andere met behulp van een weegschaal, is het vermeldenswaard dat het woord 'experimental science' onder uitdrukkelijke verwijzing naar Cusanus in het Engels ingevoerd werd.[22] De bekende alchemist en wiskundige John Dee geeft daarbij in 1570 een opvatting van de experimentele wetenschap à la Cusanus weer, die goed overeenkomt met de 'scienza nuova', zoals Galilei die later zal propageren. Zo goed als een bepaald begrip van de wiskunde een rem kan vormen op de ontwikkeling van die wiskunde en het gebruik ervan in andere domeinen, zo kan een begripswijziging daarvoor juist een stimulans vormen.

Natuurlijk zijn er nog veel meer begripsontwikkelingen te noemen, die hebben bijgedragen aan de ontplooiing van de wiskunde. Zo is bijvoorbeeld de invoering van het begrip 'functie' van groot belang geweest: in plaats van het kenmerken van iets door middel van één concreet getal, kan een functie in een keer alle mogelijke waardes aanduiden die een bepaalde eigenschap (van een figuur of een grootheid) kan aannemen. Verder wordt het rekenen met onbekende getallen in de algebra van belang en openen de differentiaal- en integraalrekening een wereld van nieuwe mogelijkheden – zoals uit hoofdstuk 5 van dit boek zal blijken. Deze conceptuele vondsten helpen de wiskunde steeds om meerdere gegevens of structuren 'samen te vatten'.

Toch is het niet zo, dat de geschiedenis van de wiskunde heeft geleid tot de ontwikkeling van een steeds verder uitgewerkt, samenhangend stelsel dat langzamerhand volledig, coherent en consistent is. Dit heeft meer te maken met het feit dat wiskunde misschien wel meer gemeen heeft met cultuur en dus ook met de soms onvoorspelbare ontwikkelingen ervan, dan men geneigd is te denken. Een aantal van de moderne ontwikkelingen heeft aangetoond dat een volledig consistent en coherent stelsel domweg niet mogelijk is of dat een consistent en coherent stelsel berust op een voorwaarde die buiten dat stelsel zelf ligt. Natuurlijk zijn we bij Plato en Aristoteles tegengekomen dat voor de oorsprong van wiskundige objecten verwezen kan worden naar speciale intuïties of abstracties, ongeacht de strengheid van het stelsel waarin de zo verkregen punten of getallen functioneren. Maar zo'n 75 jaar geleden is door Kurt Gödel aangetoond dat de strengheid van zo'n samenhangend stelsel van uitgangspunten en bewijzen niet kan worden gedemonstreerd met de procedures van dat stelsel zelf.[23] Deze onvolledigheidsstelling is in zekere zin symptomatisch voor moderne ontwikkelingen waarbij voorheen compleet geachte gebieden van de wiskunde toch bleken te kunnen worden onderverdeeld in onderling incompatibele wiskundige stelsels. Zo was al eerder gebleken dat de euclidische meetkunde niet de enige, denkbare meetkunde was: er is ook een niet-euclidische meetkunde mogelijk, waarin een driehoek bijvoorbeeld geen 180 graden bezit. Beide stelsels zijn consistent, maar niet met elkaar verenigbaar. Dat betekent dat de wiskunde moet werken met stelsels die voor hun consistentie afhankelijk zijn van externe postulaten en bovendien, dat voor sommige objecten (zoals de ruimte) meerdere stelsels mogelijk zijn. Het is evident dat daarmee niet alleen de vraag naar de aard van het wiskundige object, maar ook naar de status van waarheid in de wiskunde extra problematisch werd.[24] Op meerdere manieren is dus gebleken dat een zelfstandige, complete, coherente en consistente wiskunde principiëel onbereikbaar is.

Hoewel er natuurlijk nog steeds pogingen worden ondernomen om de eenheid van de wiskunde te funderen door bijvoorbeeld de ontwikkeling van een onderliggende en gemeenschappelijke logica, is het voor veel wiskundigen en filosofen onontkoombaar om het beeld van de wiskunde bij te stellen. Daartoe worden verschillende wegen bewandeld, die bijvoorbeeld verwijzen naar de oorsprong van wiskundige objecten of structuren. Platonisme – dat verwijst naar een apart domein van wiskundige structuren – en empirisme zijn in het denken over de wiskunde nog steeds te vinden. Naast die traditionele posities zijn er meer recent ook pleidooien die wijzen op de sociale of cultuurhistorische kant van de wiskunde. Daarbij gaat het niet alleen om het toevallige feit dat wiskunde ontwikkeld wordt door personen die wiskunde bedrijven, maar wordt erop gewezen dat de inhoud en structuur van de wiskunde wezenlijk bepaald worden door de gemeenschappelijke inzichten en praktijken van die wiskundigen. Zijn we inmiddels al wel gewend aan analyses van de natuurwetenschap vanuit het gezichtspunt van paradigma's of van onderzoeksprogramma's, in de wiskunde verwachten we dit niet zozeer. Toch wordt er ook in dat verband gesproken van een 'cultural intuition of the mathematical community' als laatste fundament van de wiskunde (Wilder, 1981) of van wiskunde als de 'study of the lawful, predictable parts of the social-conceptual world' (Hirsch, 1995).[25]

Gezien deze benadering is het natuurlijk niet verbazingwekkend dat er ook vanuit de cognitiewetenschap een duit in het zakje wordt gedaan.[26] Wiskundige concepten worden daar wel benaderd als voorbeelden van 'embodied cognition': belichaamde kennis. Daarbij worden de eigenschappen van concepten gerelateerd aan de eigenschappen van functionele netwerken in ons brein. Zo kan met breinonderzoek worden aangetoond dat bepaalde aspecten van concepten, zoals hun ruimtelijke oriëntatie, door separate netwerken worden verwerkt. In plaats van een platonische of meer empirische opvatting over de aard van wiskundige objecten, kan dus ook worden gepleit voor het traceren van de cognitieve bron van de concepten omtrent die objecten. Daarmee blijven echter vragen naar de ontologische status van een meetkundig object of de waarheidsfunctie van een uitspraak als 'er is geen grootste priemgetal' onbeantwoord. In zoverre verdient dergelijk onderzoek een positie die vergelijkbaar is met de plaats die Aristoteles in de laatste passages van zijn *Analytica Posteriora* geeft aan het proces van abstractie: interessant maar niet van wezenlijk belang.

Naast de vergelijking met de natuurwetenschap als sociale onderneming, wordt er ook gewezen op het feit dat de incompleetheid van de wiskunde haar vergelijkbaar met de empirische natuurwetenschap maakt. Immers, zoals we axioma's niet absoluut kunnen funderen, zo zijn de beginwaarden van de Oerknal ons volkomen onbekend, zodat we nooit een volledige beschrijving van de natuurwetmatigheden kunnen geven. Zelfs de wetenschapsfilosoof en voormalig logisch positivist Carnap meende dat wiskunde en natuurkunde een verre eigenschap deelden: 'the impossibility of absolute certainty' (Geciteerd door Imre Lakatos, op.cit. 202).

Het kluster van problemen dat in de Oudheid al speelde, lijkt nog steeds als een veelkoppig monster te heersen: de kentheoretische oorsprong van onze wiskundige concepten, de formele geldigheid van een wiskundige bewijsvoering, de 'effectiviteit' van wiskundige kennis in de empirische wetenschappen – al deze kwesties in één keer oplossen, is een onmogelijke taak. De groei en toepasbaarheid van wiskundige kennis wordt daar echter niet al te zeer door gehinderd, zoals verderop in dit boek zal blijken. Juist vanwege die groei en toepasbaarheid is het wel van belang om de fundamentele beperkingen van de wiskunde niet uit het oog te verliezen.

NOTEN

1. Fred Spier: 'How Big History Works: Energy Flows and the Rise and Demise of Complexity.' In: *Social History & Evolution (4, 1, 2005)*, 'Uchitel' Publishing House, Moskou.
2. Dat neemt niet weg dat we kunnen spreken van verschillende vormen van 'existentie' in de wiskunde: zo kan bijv. bewezen worden dat een bepaald wiskundig object wel moet bestaan, of kan bewezen worden dat het niet-bestaan van een object moet leiden tot contradicties, of kunnen we een oneindige reeks cijfers postuleren. Friedrich Waismann onderscheidt minstens zes verschillende vormen in 'On the Notion of Existence in Mathematics', in: *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, Rodopi, A'dam 1982.
3. D. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press 1999, Oxford, besteedt uitgebreid aandacht aan dit opschrift. Dit opschrift heeft gemeen met veel andere bronnen van de antieke wiskunde dat ze pas zo'n 700 jaar later ontstaan.
4. Barrow (1992, p. 120) vergelijkt de impact van deze ontdekking door de

Pythagoreeërs met de impact van Gödels theorema's.

5. Die negatieve opvatting heeft zijn pendant in de opvatting over de oorsprong van het wiskundige object, meent ook Hersch: 'Plato, Descartes, Frege knew that two is an ideal object. They explained what they meant by an ideal object only in negative terms – not mental, not physical. I'm pointing out that these abstract ideal objects are social concepts.' Genoemde auteurs zouden het vanzelfsprekend oneens zijn met deze opvatting (Hersch, Rueben. 'Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics', *Phil.of Math*. 1995, p. 593).
6. 'Van [de meetkunde en aanverwante vakken] zien we hoe ze wel een droomgezicht hebben van het zijnde, doch tevens hoe zij er niet toe kunnen komen een klaarwakkere kijk te krijgen op dit zijnde, zolang zij hypothesen geruiken en die zo maar ongemoeid laten, uit onmacht om daar rekenschap van te geven' (*De Staat*, 533 c).
7. Paul Bernays munt de term wiskundig 'Platonisme' door het te omschrijven als een tendens om de wiskundige objecten te beschouwen onder volledige afzondering van het reflecterende subject. 'On platonism in mathematics' (1934) in P. Benacerraf & H. Putnam (1983, p. 259).
8. Wigner, E. 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences' in: *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1960, p. 14. N.D. Goodman wijst er in zijn kritiek op, dat we evengoed kunnen spreken van 'the unreasonable effectiveness of physics in engineering', omdat de natuurkunde ook uitgaat van veronderstellingen – van vacuüm of een ideaal gas of een perfecte isolatie, bijvoorbeeld- die in de ingenieurspraktijk niet voorkomen. Veelzeggend is overigens de titel van zijn artikel: 'Mathematics as Natural Science', *J.Symbolic Logic*, 55:1, 1990, p 188.
9. Overigens hoogstwaarschijnlijk onderwezen in de wiskunde door leerlingen van Plato –volgens Thomas Heath in zijn commentaar bij *Euclid's Elements*, Dover Publications 1956, p. 2.
10. Geoffrey Lloyd stelt dat het waarschijnlijk is dat in de antieke oudheid strikt deductieve bewijsvoering eerder voorkwam in de filosofie dan in de wiskunde. *Magic, Reason and Experience*, Cambridge UP 1979, p. 110.
11. De wetenschapsfilosoof en wiskundige Lakatos heeft dan ook bepleit dat er in de wiskunde meer gezocht moet worden naar falsifiërende uitspraken, net zoals dat in de natuurkunde gedaan wordt. Er bestaan bijvoorbeeld in de wiskunde vermoedens, die niet volledige bewijsbaar zijn maar waarvoor een enkel tegenvoorbeeld wel afdoende zou zijn. Zo

zou het bestaan van een enkel even getal dat niet door het optellen van twee priemgetallen kan worden bereikt (2=1+1; 4=3+1; etc.) het zgn. 'vermoeden van Goldbach' weerleggen. (I.L.Lakatos, 'A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics' ibid. *BritJPhilSci* 27, 1976, p. 205.)

12. J. Lear spreekt van een 'predicate filter' dat Aristoteles loslaat op bijv. een bronzen gelijkzijdige driehoek. ('Aristotle's Philosophy of Mathematics', *Philosophical Review*, 1982, p. 168)
13. In zijn boek over 'De Hemel' stelt Aristoteles dat er immers onderscheid bestaat tussen een punt, lijn of vlak en het object van de natuurwetenschapper, omdat die geometrische objecten geen enkele zwaarte bezitten, terwijl het natuurwetenschappelijke object dat wel heeft. (*De Caelo*, 299 a 27 – b 7)
14. In contrast met fysische objecten betreffen de wiskundige objecten 'onbeweeglijke zaken, die echter niet afgezonderd bestaan, maar alsof ze in een stof zijn.' (*Metaf.* 1026 a 14)
15. Elders legt hij uit dat materialiteit op zichzelf onkenbaar is, maar dat ze deels zintuiglijk waarneembaar is en deels als denkbare materialiteit bestaat; de denkbare materialiteit is in de zintuiglijk waarneembare materialiteit aanwezig maar niet voor zover die zintuiglijk waarneembaar is, zoals bij de wiskundige objecten. (*Metaf.* 1036 a 6) Abstractie is dan het afzonderen van de denkbare materie van de waarneembare materie.
16. Heath merkt op dat we via Aristoteles waarschijnlijk het beste begrip krijgen van wat Euclides bedoelde met postulaat en axioma. (Euclid, *The 13 books of the Elements*, vol I, p. 124)
17. Ondanks deze cruciale beperking tot specifieke domeinen heeft de axiomatische methode een enorme invloed gehad. Gezien het feit dat Aristoteles zelf echter van die axiomatische methode nauwelijks gebruik maakt in zijn overige wetenschappelijke werk, lijkt het plausibel dat hij de methode vooral van belang achtte als didactisch hulpmiddel, als methode voor het demonstreren van de opgedane kennis. Een dergelijke reconstructieve functie is ook nog terug te vinden in 1918 wanneer een van de invloedrijkste wiskundigen, David Hilbert, stelt: 'Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens ueberhaupt sein kan, verfaellt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik.' ('Axiomatisches Deuten', in: *Gesammelte Abhandlungen*, Band III. Julius Springer Verlag, Berlijn 1935, p. 156.)

    Michael J. Crowe vraagt zich ook af, of axiomatisering van een domein niet eerder een van de laatste fases van zijn ontwikkeling is, in plaats van een van de eerste fases ('Ten Misconceptions about Mathematics and Its History' in W. Aspray & P. Kitcher ed., *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press 1988,p. 266).

18. Een meer wijsgerige verhandeling hierover verscheen een kwart eeuw eerder in Amsterdam, nl. Spinoza's *Descartes' Principes van de filosofie, op geometrische wijze gefundeerd* uit 1663. Spinoza schrijft dan ook in zijn *Theologisch Politieke Tractaat* (uit 1670) dat de natuur – waartoe ook de mens gedeeltelijk behoort – wetmatig functioneert.
19. Zie ook *De Docta Ignorantia*, I, 1, waar hij instemmend stelt: 'Daarom kwam Pythagoras tot het oordeel, dat alles middels de kracht van het getal geordend en gekend kan worden.'
20. Getal kan samenvatten wat samen hoort en ook onderscheiden wat verschillend is. (Cf. *De Mente* X, 266)
21. Dit idee van mathematische objecten als producten van de menselijke geest lijkt Cusanus gemeen te hebben met de latere 'intuïtionist' Brouwer, zoals Erik Heijermans betoogt in een ongepubliceerd manuscript.
22. Zie daarvoor F. Nagel, *Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften*, Münster 1984, p. 145
23. Deze formulering is ontleend aan J. von Neumann, 'The Mathematician', op.cit. 2034.
24. Hoewel bijvoorbeeld H. Putnam de zogenaamde crisis in de wiskunde wilde bezweren door te onderscheiden tussen discussies over wiskundige objecten of verzamelingen enerzijds en de mogelijkheid of noodzakelijkheid van een bepaalde wiskundige stelling anderzijds. Al doende bepleit hij een 'Mathematics without foundations' in: Putnam & P. Benacerraf eds.: *Philosophy of mathematics*, Cambridge UP 1983.
25. Wilder, Raymond L. 'Laws governing the evolution of mathematics' in: *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press 1981.
    Hersch, Rueben. 'Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics', *Phil.of Math*. 1995.
26. Zie onder andere George Lakoff & Rafael E. Núñez (2000). *Where Mathematics Comes From – How the Embodied Mind brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.

LITERATUUR

Benacerraf, P. & H. Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics. Selected readings*. Cambridge University Press, 1983.

Barrow, J.D. *Pi in the Sky*.Clarendon Pres, Oxford 1992.
Cassirer, E. *Individuum und Kosmos in der Philosophie der Renaissance*. Teubner, Leipzig 1927.
Cusanus. *Compendium : kurze Darstellung der philosophisch-theologischen Lehren*. ed. B. Decker en K. Bormann, Meiner Verlag, Hamburg, 1970.
Cusanus. *De docta ignorantia/ Die belehrte Unwissenheit*. ed. H.G. Senger, R. Klibansky en P. Wilpert, in 3 delen, Meiner Verlag, Hamburg 1964.
Cusanus. *De Mente*, Aanhangsel bij Cassirer, 1927.
Dijksterhuis, E.J., *De mechanisering van het wereldbeeld*, Meulenhoff 1950.
Jacquette, D. (ed.) *Philosophy of Mathematics. An Anthology*. Blackwell Publishers, Oxford 2002.
Mansfeld, Jaap (ed.) *Die Vorsokratiker*. Reklam Verlag, Stuttgart 1987.
Newman, J.R. (ed.) *The World of Mathematics*, Tempus books, Washington 1988, 4 delen, eerste druk 1956, Simon and Schuster, New York.
Newton, Isaac. *Philosophical Writings*, ed. A. Janiak. Cambridge University Press, 2004.
Struik, D. Geschiedenis van de wiskunde. Het Spectrum, Utrecht 1990. (Oorspr. *A concise History of Mathematics*, Dover 1948.)
Swart, H.C.M. de. *Filosofie van de wiskunde*. Martinus Nijhoff, Leiden 1989.