Inleiding

Machiel Keestra

Hoezeer een hedendaagse lezer dat ook mag verwonderen, overzichten van de westerse geschiedenis van de filosofie, de wiskunde, de natuurkunde of van de wetenschap beginnen in het algemeen bij de Ionische natuurfilosofen. Zijn wij doordrongen van de grote verschillen in inhoud en methode van de filosofie of de wiskunde of de natuurkunde, blijkbaar bestonden er aanvankelijk zodanige overeenkomsten dat zij hetzelfde beginpunt kennen. Vanzelfsprekend gaat het hier niet over het beginpunt van het denken over betekenis of het beschouwen van de natuur of het rekenen – dat soort activiteiten werden natuurlijk al in oudere en niet-Griekse culturen uitgeoefend. Mythologieën, astronomische tabellen en boekhoudkundige berekeningen zijn ons in onder andere hiërogliefen en spijkerschrift overgeleverd uit Egypte, Babylonië en andere gebieden. Al duizenden jaren wisten gemeenschappen water buiten de dijken te houden, oogsten spaarzaam te gebruiken, grote legers te verplaatsen en onderhouden.

Toch gebeurt er iets opmerkelijks in de zesde eeuw voor onze jaartelling, aan de Ionische kust van het huidige Turkije. Daar bevonden zich Griekse gemeenschappen, koloniën, die zich aan de periferie van de Griekse wereld bevonden en zo ook in directer contact stonden met de Egyptische en Babylonische beschavingen en hun geschiedenis. Wellicht is het te danken aan dat kruispunt van intellectuele wegen, dat de Ioniërs ertoe kwamen om een andere manier van beschouwen, van kennisordening, te gaan ontwikkelen. Als Grieken waren zij natuurlijk vertrouwd met de homerische en hesiodische mythologieën, waarin goden verantwoordelijk waren voor het wel en wee van de mensenwereld, maar ook voor het ontstaan en de ordening – kosmos – van de wereld als geheel. Hesiodos had die ordening zelfs nog een stuk systematischer gemaakt dan Homeros door een chronologie aan te brengen, zodat de ogenschijnlijke wirwar aan goden tot een redelijk nette stamboom bleek te kunnen worden gereduceerd. Als Ioniërs maakten zij echter ook kennis met geheel andere mythologieën en godenwerelden. Sterker nog: Herodotos, vader van de geschiedschrijving en eveneens afkomstig uit Ionië, betoogde dat de Griekse godenwereld grotendeels ontleend is aan de Egyptische. Hij hanteert een misplaatste etymologie om de theologie te verklaren vanuit een behoefte aan thesis: ordening en vaststelling. Ordenen en vaststellen gebeurde in Egypte en omstreken natuurlijk niet alleen door middel van godenverhalen, maar ook met gebruik van allerhande rekenmethoden en tabellen. De Ionische bevolking zal daarmee evenzeer in aanraking gekomen zijn als met die verschillende godenverhalen. Herodotos' verhalende en vergelijkende geschiedenissen zijn misschien wel illustratief voor de omgang met al die invloeden door de enigszins beschouwelijk ingestelde Ioniërs: overeenkomsten, verschillen en onderliggende structuren vragen er bijna om ontdekt te worden. Bovendien doemt dan ook de vraag op naar de verklaring van de ogenschijnlijke verscheidenheid. Een vraag die niet meer met weer een andere mythologie beantwoord kan worden, omdat juist de variatie aan godenverhalen aanleiding gegeven had tot enige scepsis.[1] Een vraag die dus om een ander soort antwoord vraagt. Een vraag die zich eerder opdrong op het grensvlak tussen culturen dan in het behaaglijke centrum van een polis als Athene.

Thales van Milete wordt wel de eer gegund om als eerste een wetenschappelijke manier van vragen en antwoorden ontwikkeld te hebben. Weliswaar dateren onze bronnen uit een paar eeuwen na zijn dood, maar de overgeleverde ideeën en activiteiten van Thales maken hem in elk geval tot een geschikte kandidaat. Zijn voor ons theorie en praktijk (en zoals we verderop in dit boek zullen zien: zuivere en toegepaste wiskunde) veelal gescheiden zaken en zijn wij geneigd om disciplinair te denken, voor Thales waren dat soort grenzen nog niet aan de orde. In elk geval wordt over hem verteld dat hij zich bezighield met het verleggen van een rivier, het voorspellen van een zonsverduistering (in 585 v. Chr.), het speculeren met olijvenpersen

– hetgeen hem een fortuin opleverde –, het ontwikkelen van nieuwe afstands- en hoogtemetingen, het construeren van geometrische bewijzen, het verklaren van aardbevingen en het vervaardigen van een invloedrijk wijsheidsgeschrift. Een indruk van zijn werkwijze krijgen we wellicht uit zijn antwoord op de vraag wat oorsprong en doel van alles is – de vraag naar de meest fundamentele aard van de werkelijkheid. Volgens Thales bestaat die oorsprong en doel uit water – waarin hij overeenstemt met Homeros' visie dat Okeanos de oorsprong van de goden is (zie Homeros' *Illias* 14, p. 201).

Thales geeft echter geen oorsprongsmythe, maar maakt plausibel waarom water het gezochte 'principe' is en hanteert daartoe een aantal afgeleide verklaringen. Zo ontstaan volgens hem de dingen uit water wanneer dat vast wordt, bevriest en vergaan ze weer wanneer het ijs weer vervloeit. Bovendien verklaart het drijven van de aarde en van dingen op water ook het voorkomen van aardbevingen. Tenslotte zijn alle dingen net als de natuur veranderlijk en beweeglijk vanwege hun oorsprong, hun 'principe': water. Door het hanteren van een gelijknamige noemer voor alle dingen kon hij ze met elkaar in één structuur onderbrengen. Zo mat Thales de hoogte van de piramiden, door op het moment dat onze schaduw net zo groot is als wij zelf zijn ook de lengte van de schaduw van de piramiden te meten. Door af te zien van de opvallende uiterlijke verschillen tussen onszelf en piramiden, door de overeenkomsten in geometrische aspecten te onderkennen en door gebruik te maken van de oneindig grote afstand tot de zon (waardoor het positieverschil tussen een piramide en een mens verwaarloosbaar is) kon hij een driehoek van dezelfde verhoudingen ontdekken. Het hanteren van een principe in verschillende gestalten – water in verschillende fases – om een bonte verscheidenheid aan feiten in een klap te verklaren, blijkt zo overeenkomsten te hebben met het gebruik van geometrische verhoudingen om bepaalde overeenkomstige eigenschappen van verschillende objecten te leren kennen.

De ontwikkeling van de natuurfilosofie en wetenschap vindt plaats door enerzijds een toenemende verheldering en systematiek van begrippen, anderzijds door een toenemende interesse in het gebruik van de wiskunde hierbij. Niet alleen moeten zoveel mogelijk verschijnselen door zo eenvoudig mogelijke verklaringen met zo min mogelijk principes kunnen worden beschreven. Als het even kan, moeten in die beschrijvingen ook wiskundige elementen worden gehanteerd. Iets dergelijks zien we dan ook bij de Ioniër die meestal na Thales als grondlegger van de wetenschappen genoemd wordt en bovendien diens leerling was: Anaximander. Niet alleen komt bij hem als principe in de plaats van water het 'oneindige' ter sprake, dat naast een theologisch ook een wiskundig aspect bezit. Bovendien gebruikt hij verschillende geometrische figuren om het heelal te beschrijven, waarbij hij er niet voor terugdeinst om grootteverhoudingen aan te geven. Zo is de zonnecirkel volgens hem 27 keer zo groot als de aardbaan en doet hij uitspraken over de relatieve posities van dergelijke banen. Daarmee blijkt onmiddellijk het voordeel van een dergelijke beschrijving: vormen en afmetingen of verhoudingen zijn door anderen te controleren, zodat de ideeën goed te weerleggen of bevestigen zijn. Dit geldt natuurlijk minder voor het veronderstelde principe van de kosmos, dan voor de getalsverhoudingen tussen verschillende onderdelen van die kosmos.

Zo is hier al zichtbaar, dat natuurfilosofie en wiskunde misschien wel deel uitmaken van een zelfde poging om structuur en eenvoud aan te brengen in de verscheidenheid van de werkelijkheid, maar dat natuurfilosofie en wiskunde verschillen in hun mogelijkheden en resultaten. Conceptueel kunnen relaties gelegd worden die betekenisvol kunnen zijn zonder dat we ze altijd volledig kunnen preciseren, terwijl we wiskundige verhoudingen meestal precies kunnen bepalen maar daarbij meestal een zeer beperkte kennis opdoen. In de volgende hoofdstukken van dit boek zullen we onder andere ontdekken dat de ontwikkeling van de wiskunde zelf ook voortgedreven werd door zowel een interesse in fundamentele structuren als een drang naar praktisch toepasbare nauwkeurigheid.

Die verschillende interesses blijken echter conceptueel ook verschillende eisen te stellen. Dit kan misschien worden vergeleken met het feit dat er verschillende kaarten beschikbaar zijn van een en hetzelfde gebied en dat onze keuze voor een bepaalde schaal afhankelijk is van het gebruik dat we ervan willen maken. Voor een automobilist is een andere kaart bedoeld dan voor een wandelaar of een geoloog. Die kaarten verschillen niet alleen in schaal en detaillering, maar ook in de markering van wegen, herkenningspunten, gemeentegrenzen, aardlagen, enzovoorts. Het is duidelijk dat er geen enkele kaart kan worden vervaardigd die op gelijke wijze alle gegevens bevat: of het zou wellicht een duplicaat op schaal 1:1 van het gebied zelf moeten zijn.

Niet toevallig wordt van Anaximander gezegd dat hij als eerste bedacht had om de aarde af te beelden en daarbij de omtrek van water en land te markeren.[2] Deze metafoor van de kaartenmaker kan blijkbaar helpen om het werk van wetenschappers en wiskundigen te verhelderen. Dezelfde metafoor komt dan ook ter sprake in het eerste hoofdstuk. Hier gaat Machiel Keestra onder andere in op de relatie tussen de aard van het wiskundige object en de toepassing van de wiskunde voor het verkrijgen van kennis van de werkelijkheid. Aan de hand van de klassieke filosofen Plato en Aristoteles schetst hij verschillende opvattingen van het wiskundige object. Daarbij blijken zeer uiteenlopende vragen met elkaar samen te hangen: hoe komen wij eigenlijk aan ons begrip van het getal of van de geometrische vorm? Zijn dat getal en die vorm ondergebracht in een bepaald domein van de werkelijkheid – tussen de zintuiglijk waarneembare, stoffelijke objecten en de abstracte ideeën in? Of, en dat is meer Aristoteles' opvatting, ontlenen we getal en vorm middels een proces van abstractie aan die zintuiglijke waarnemingen? Creëert onze geest als het ware die objecten, waarvoor we vervolgens sluitende definities proberen te geven en ze proberen onder te brengen in een complex axiomatisch systeem? Duidelijk wordt bij deze vergelijking dat de twee denkers niet alleen een ander soort inzicht of kennis van die objecten poneren, maar dat die objecten ook een andere bestaanswijze hebben. Dat heeft vervolgens ook zijn weerslag op het gebruik dat we van die kennis kunnen maken. Als de bron van onze wiskundige kennis veraf staat van de bestaanswijze van zintuiglijk waarneembare objecten, dan is het maar de vraag of die kennis ons wel iets kan leren over die zintuiglijk waarneembare werkelijkheid. Waaruit zou die relatie moeten bestaan? Aristoteles lijkt in dit opzicht een stap verder te willen zetten en brengt de daarvoor genoemde abstractie in het spel. Die abstractie herleidt onze aanraking met wiskundige objecten tot de waarneming van die werkelijkheid. Omdat Aristoteles echter besefte dat de wiskundige waarheid niet afhankelijk van en beperkt mag blijven door de onbetrouwbare waarnemingen, heeft hij ten aanzien van de wiskunde als wetenschap een andere route bedacht. De axiomatisch-deductieve bewijsmethode, vooral bekend vanwege *De Elementen* van Euclides, werd door Aristoteles ontwikkeld en ook voor de wiskunde bedacht. Hoewel we cirkels hebben leren kennen en herkennen vanuit de waarneming, kunnen we volgens deze axiomatische methode een strenge definitie van de cirkel geven en daarmee vervolgens allerlei constructies en berekeningen uitvoeren.

Daarmee lijkt hij de relatie tussen waarneembare werkelijkheid en wiskunde gegarandeerd te hebben. Toch blijft de rol van de wiskunde in zijn ogen beperkt tot de stoffelijke, ruimtelijke kant van de dingen. Omdat Aristoteles van mening was, dat werkelijke kennis betrekking had op het wezen van de dingen – dat ook in definities vastgelegd zou moeten worden – kon volgens hem de wiskunde nooit wezenlijke kennis van de werkelijkheid opleveren. Een echte mathematische natuurwetenschap bleef daardoor buiten zijn bereik. Om die te bereiken was nog een conceptuele stap nodig.

Die stap werd onder andere genomen door de middeleeuwse kardinaal Cusanus. Hier komt die kaartenmaker ter sprake. Cusanus beschrijft een proces van toenemende verfijning van een getekende wereldkaart, waarbij de kaartenmaker vertrouwt op de informatie die zijn zintuigen bieden. De verstandelijke verwerking van die gegevens is echter bovendien een soort tegenhanger van de productieve geestelijke vermogens van de Schepper: de kaart en de geschapen werkelijkheid staan dus in een directe verhouding met elkaar. Deze visie van Cusanus maakt plausibel dat onze empirische kennis direct gerelateerd kan zijn aan de werkelijkheid en verdedigt bovendien het nut van niet geheel nauwkeurige of volledige kennis. Welhaast vooruitlopend op het Popperiaanse streven naar steeds grotere 'Verisimilitude' of waarheidsbenadering, bestaat Cusanus' idee van wetenschap uit een proces van toenemende kennisverfijning. Waarheid, als een volmaakte overeenstemming tussen onze kennis en de werkelijkheid, mag dan misschien onbereikbaar zijn, een toenemende gelijkenis – similitudo – blijkt meestal zeer bruikbaar te zijn.

Hierboven was al even sprake van de bewijsmethode die door Euclides' werk zo bekend geworden is. In het hoofdstuk 'Enkele aspecten van de wiskunde in de Griekse oudheid' – dat bewerkt en afgerond werd door Jan van Maanen – wijst Albert Grootendorst erop, dat naast hun interesse in het bewijs, de Grieken zich ook richtten op verschillende procedures om wiskundige objecten te construeren. Bedoeling van de auteur is juist het gangbare beeld van die antieke wiskunde aan te vullen. Vanwege de invloed van Euclides' *Elementen*, tot in het moderne wiskundeonderwijs aan toe, is het beeld ontstaan van een uniforme wiskunde. Maar net zoals er verschillende opvattingen over wiskundige objecten waren, zo waren er ook verschillende methoden. Men ging destijds beslist niet uitsluitend streng axiomatisch en deductief te werk, maar hanteerde daarnaast andersoortige constructieve methoden. Daarbij gaat het niet meer om het afleiden van steeds complexere figuren uit definities, maar om het opbouwen van zulke figuren met simpele middelen.

Niet alleen de bekende liniaal en passer van Euclides om geometrische figuren te construeren, maar ook het gebruik van steentjes die in allerlei figuren gelegd werden, bleek productief voor het formuleren en oplossen van wiskundige problemen. Zo konden sommige getallen – priemgetallen bijvoorbeeld – of getalsverhoudingen onderzocht worden door steentjes in bepaalde figuren te leggen. Een voordeel van deze steentjesarithmetiek is het aanschouwelijke karakter ervan. Die aanschouwelijkheid bleek echter grote beperkingen te hebben, getuige de consternatie die de ontdekking van niet-natuurlijke getallen opleverde. Die waren niet meer te construeren volgens deze methode en bovendien leken ze een exacte bepaling van uitkomsten in de weg te staan. Ondanks dit soort bezwaren en de omslachtigheid maakten Johan de Witt en Newton in de zeventiende eeuw nog gebruik van combinaties van meetkunde en getaltheorie die geïnspireerd waren door Griekse voorbeelden.

De Griekse wiskunde lijkt zo geleid te worden door een aantal uitgangspunten, sommige in relatie tot de constructieve principes, sommige in relatie tot de resultaten van berekeningen. Zo werd door Euclides voorgeschreven dat figuren geconstrueerd moesten worden met passer en liniaal. Dat leidde soms tot ingewikkelde procedures, terwijl sommige meetkundige problemen zich met die middelen zelfs geheel niet lieten oplossen. Toch werd de zogenaamde ‘neusis-constructie’, die soms een simpeler of effectievere oplossing kon bieden, door velen – waaronder Plato en Euclides – afgewezen. Het feit dat voor deze constructie een liniaal niet direct gebruikt kon worden maar moest worden voorzien van een aantal merktekens en een scharnierpunt, vond geen genade in hun ogen. De vaak genoemde ‘elegantie’ als een karakteristiek van een fraai wiskundig bewijs kreeg zo de voorkeur boven de effectiviteit. Toch was juist de veelzijdige en belangrijke wiskundige en ingenieur Archimedes iemand die zich niet liet beperken door genoemde uitgangspunten, die soms bepaalde constructiewijzen en exactheid voorschreven in plaats van pragmatische oplossingen. Het is dan ook niet verwonderlijk dat hij die neusis-constructie wel graag gebruikte. Het behandelde voorbeeld, dat een meetkundig probleem oplost met behulp van een mechanische benadering, laat dat fraai zien: een verrassende voorstellingswijze, een onnauwkeurig resultaat en pas achteraf voegde Archimedes een streng bewijs toe. De erfenis van de Griekse wiskunde is dan ook een zeer gevarieerde: enerzijds streng constructief en bewijzend, maar anderzijds toch ook pragmatisch en vindingrijk. Ook verderop in dit boek zullen we die twee kanten van de medaille tegenkomen, soms onderscheiden als 'zuivere' en 'toegepaste' wiskunde.

Dat toegepaste wiskunde vernieuwend kan zijn terwijl nauwkeurigheid daarbij niet wezenlijk is, blijkt al meteen in het eerste deel van het hoofdstuk 'Indiase en Arabische wiskunde', waar Jan Hogendijk ingaat op de astrologie. Toegepaste wiskunde vinden we voor de Oudheid namelijk vooral terug in die astrologie. Op basis van jarenlang verzamelde gegevens ontwikkelden de Babyloniërs rekenmethoden die tot voorspellingen moesten kunnen leiden. Mathematisering van natuurverschijnselen is dus niet slechts een methode die in de moderne westerse wetenschap beoefend werd. Anders dan de Babyloniers hadden de Grieken aanvankelijk meer interesse in astronomische modellen en minder in de berekening van voorspellingen. Dat de Griekse erfenis wel uit twee verschillende tendensen lijkt te bestaan, blijkt ook uit het vervolg: vanaf het jaar 200 bloeide de sterrenkunde op, terwijl de zuivere wiskunde weer verdween. De modellen werden aangepast aan de planeetbewegingen die ermee beschreven moesten kunnen worden. Belangrijke figuur was toen Hipparchus, die als het ware de voorspellende, Babylonische wiskunde combineerde met Griekse meetkundige modellen. Daarbij gebruikte hij de irrationele getallen die zijn voorgangers nog zo sterk hadden afgewezen. Door deze combinatie was het mogelijk om modellen op te stellen en vervolgens – aan de hand van waarnemingen – te controleren of de voorspellingen klopten: een belangrijke vooruitgang, waarbij toepassingen leidend waren.

Ook in India bleken levensbeschouwelijke of religieuze opvattingen bij te dragen aan de ontwikkeling van de wiskunde. Vaak ging het ook daar om wiskunde in dienst van de astrologie. Maakten de Grieken gebruik van de Babylonische erfenis, de Indiase sterrenkunde is weer een mix van die beide erfenissen met de oudere Indiase kosmologie. Wiskunde wordt in de Middeleeuwen in India voornamelijk ten dienste van de sterrenkunde gepraktiseerd. Ons decimale positiestelsel hebben we aan die wiskunde te danken.

Net als elders wordt ook de Arabische wiskunde beïnvloed door de interesse in de sterrenkunde en astrologie, waarbij Indiase invloeden werden verrijkt met vertaalde Griekse antieke teksten. Door het werk van al-Khwārizmī is de algebra bekend geworden en op een heldere manier gepresenteerd. Ook in ander opzicht bestaat de Arabische wiskunde vaak uit een verwerking van eerdere resultaten of uitbreiding van delen van de wiskunde. Over het algemeen maakte men bij het oplossen van praktische problemen liever gebruik van reeds bekende methoden. Radicale vernieuwingen zijn er dan ook niet gedaan. Toch is het spijtig dat sommige resultaten van de Arabische wiskunde niet, of pas rijkelijk laat, zijn doorgedrongen tot de westerse wetenschap. Desalniettemin heeft de Arabische wetenschap, die voortborduurde op de antieke erfenis, in belangrijke mate bijgedragen aan de Europese Renaissance, omdat in Europa zelf de wis- en sterrenkunde destijds nauwelijks meer op niveau beoefend werden. De vertaling van Arabisch werk naar het Latijn was daarbij van cruciaal belang en heeft ook bepaald welke Arabische vondsten invloed konden hebben op de Europese ontwikkelingen.

Belangrijke les uit dit hoofdstuk is wel dat de ontwikkeling van de wiskunde gedeeltelijk afhankelijk is van de continuïteit van een traditie en het kunnen voortbouwen op andermans kennis. Zo zijn er ontdekkingen gedaan die domweg geen invloed hebben gehad, omdat ze onbekend gebleven zijn. Dit voortbouwen kan echter belemmerd worden door praktische aspecten, zoals de taal die gehanteerd wordt. Dit zal blijken aan de hand van voorbeelden uit de Indiase wiskunde. De grote invloed van het werk van Euclides heeft dan ook zeker te maken met de didactische voordelen van zijn methode. In dat opzicht heeft de Arabische wiskunde een tijd lang meer vooruitgang kunnen boeken dan de Indiase wiskunde, totdat religieuze opvattingen daaraan weer een halt toeriepen.

Dat religiositeit niet per se een hinderpaal hoeft te zijn voor de ontwikkeling van de wiskunde zal dus blijken uit het eerste hoofdstuk, waarin kardinaal Cusanus' opvattingen besproken worden. Die opvattingen hebben op een moeilijk te traceren wijze invloed gehad op de ontwikkeling van de moderne wetenschap. Die moderne wetenschap richtte zich op kwantitatieve verklaringen van natuurprocessen die waarneembaar zijn – niet langer op bekendheid met de substantiele en eeuwige aard van God of zijn schepping.

In hoofdstuk vier zal Henk Bos benadrukken dat de explosieve groei van de wiskunde in de zeventiende eeuw grotendeels te danken is aan de interesse voor continue veranderingsprocessen. Deze vroegen om een andere wiskunde dan de analytische meetkunde, namelijk om differentiaal- en integraalrekening. Deze werden ontwikkeld door Newton en Leibniz en openden geheel nieuwe velden van onderzoek, die in de erop volgende eeuwen werden ontgonnen. Allerhande gebieden van de mechanica, later ook bijvoorbeeld van de warmteleer of de theorie van het magnetisme, konden met behulp van de differentiaalvergelijkingen worden beschreven. Aangezien deze kennis bovendien voorspellingen mogelijk maakte, werden ook vele technieken en technologieën ontwikkeld die een enorme impact hebben gehad. Maar aanvankelijk werden deze nieuwe vergelijkingen toegepast op dat gebied, dat we ook al in de Oudheid zagen als voornaam domein van de wiskunde: de astronomie en daarmee samenhangende voorspellingen. Voor de zeevaart betekende dat een toegenomen veiligheid.

Aan de hand van een vergelijking tussen een wiskundig overzichtswerk uit het begin van de zeventiende eeuw en een uit het eind van de zeventiende eeuw, maakt Bos duidelijk welke veranderingen er in die eeuw hebben plaatsgevonden. Naast de genoemde differentiaal- en integraalrekening gaat het dan voornamelijk om de ontwikkeling van de analytische meetkunde en om de enorme uitbreiding van de toegepaste of gemengde wiskunde.

Die analytische meetkunde werd ontwikkeld doordat wiskunde uit de Arabische landen in West-Europa bekend werd, terwijl daaraan later nog de herontdekte Griekse wiskunde werd toegevoegd. In het ene geval ging het om de algebra, waarmee men vergelijkingen met een onbekende grootheid ‘x’ kan oplossen, in het andere geval om de analyse van meetkundige problemen, die middels een constructie werden opgelost. Omdat men overeenkomsten zag tussen de algebra en de analyse, lag het voor de hand om te proberen beide methoden te combineren. Op die manier ontstond de analytische meetkunde, waarbij auteurs als Fermat en Descartes aantoonden dat algebraïsche vergelijkingen ook door meetkundige figuren (parabolen, en dergelijke) kunnen worden weergegeven. De vervolgens ontwikkelde differentiaal- en integraalrekening maakte het mogelijk om nog veel meer eigenschappen van die grafieken en specifieke punten ervan te leren kennen.

Bos benadrukt ten slotte, hoezeer deze wiskundige ontwikkelingen gemotiveerd werden door een aantal overtuigingen die men in de zeventiende had over de relatie tussen wiskunde, wetenschap en werkelijkheid, en hoe deze invloedrijk zijn geweest bij de ontwikkeling van de mathematische wetenschappen. Hij verwijst daarbij onder meer naar de Pythagoreïsche overtuiging 'alles is getal': dankzij de nieuw ontwikkelde, wiskundige technieken en hun toepassingen, mocht een dergelijke visie weer op hernieuwde aanhang rekenen. Bovendien bleef de *mathesis universalis* niet beperkt tot de wiskundige natuurwetenschap, maar werkte men aan een wiskundige en logische benadering van al het menselijke denken.

Ontwikkelingen hebben niet altijd de vorm van de revolutionaire vernieuwingen die we in de zeventiende eeuw gezien hebben en waarbij een aantal pioniers – zoals Fermat, Descartes, Newton, Leibniz – zo invloedrijk waren. Even belangrijk kunnen ontwikkelingen buiten het directe gebied van de wiskunde zijn: nieuwe instrumenten en technologieën, allerhande toepassingen, ontstaan en groei van tijdschriften en academies. Bovendien is het van belang om de eerder gedane ontdekkingen uit te werken en te leren toepassen op verschillende probleemgebieden. Jan van Maanen laat in het hoofdstuk 'Sprongen in het diepe en passen op de plaats' zien, dat er in de achttiende eeuw veel van dat soort ontwikkelingen hebben plaatsgevonden. Zo werden allerlei wiskundige natuurwetenschappen ontwikkeld, zoals de hydrodynamica en de hemelmechanica. Ook werden nieuwe gebieden ontgonnen, zoals de kansrekening. Hierbij waren eminente wiskundigen als de Bernoulli's, Euler en Laplace betrokken.

Het werk van Daniel Bernoulli laat zien hoe een eminent wiskundige in die tijd nog actief kon bijdragen aan de ontwikkeling van heel verschillende domeinen van de wiskunde. Belangrijk is zijn werk over de hydrodynamica geweest, over 'de krachten en bewegingen van vloeistoffen'. Tevens paste hij soortgelijke wiskundige technieken toe op de spierwerking, molecuulbewegingen, elasticiteit, enzovoort. Bernoulli nam ook deel aan de discussie over hoe men de eigenschappen van een trillende snaar het beste wiskundig kon beschrijven. Interessant is dat hij daarbij de fysische ervaring dat trillende snaren meerdere (boven-)tonen voortbrengen, liet meewegen in de keuze voor bepaalde wiskundige beschrijvingen. Hij was daarnaast ook actief in de kansrekening, waarbij hij eveneens inventief was in het vinden van modellen voor de beschrijving van praktische problemen zoals de vaccinatie tegen pokken.

Hoezeer een op meerdere fronten actieve wiskundige als Bernoulli onze aandacht ook verdient, Van Maanen vraagt tevens aandacht voor twee geheel andere arena's waarin wiskundigen werkzaam waren. Vanuit ons perspectief valt bijvoorbeeld de grote groep van wiskundigen niet op, die werkzaam was buiten het domein van de selecte groep van vernieuwers. Zij moesten vaak oplossingen voor diverse alledaagse vraagstukken ontwikkelen en bijdragen aan toepassingen van wiskundige vernieuwingen. Een voorbeeld is te vinden in het werk van de provinciale landmeter Morgenster, wiens leerboek zo'n 125 jaar lang werd gebruikt. Hij borduurt daarin voort op de euclidische meetkunde, terwijl hij zich bovendien laat inspireren door de praktische beperkingen die het meten in het veld met zich meebrengt.

Naast deze grote groep van 'alledaagse' wiskundigen was er in de achttiende eeuw ook een kleine groep van auteurs die zich juist richtten op filosofische debatten over de wiskunde. Die debatten gingen deels over vragen over de grondslagen van de wiskunde, bijvoorbeeld over de nieuw ontwikkelde differentiaal- en integraalrekening. Daarnaast ging het om meer metafysische problemen, zoals de verhouding tussen lichaam en geest of het vraagstuk van de vrije wil. Omdat de wiskundige natuurwetenschap het beschrijven van natuurprocessen mogelijk had gemaakt, kregen die klassieke metafysische problemen weer een nieuwe invulling. Bovendien – en hier is weer de invloed van externe omstandigheden zichtbaar – ontstonden er in die tijd allerlei organisaties die middels prijsvragen dit soort debatten aanjoegen. Zelfs de invloedrijke wiskundige Euler nam deel aan dit soort debatten. Hoezeer hij ook bijdroeg aan de ontwikkeling van zowel zuivere als toegepaste wiskunde, hij was er zeer beducht voor om de menselijke geest en God ook te beschrijven als waren ze fysische grootheden. De ambities van de zich sterk ontwikkelende wetenschappen reikten blijkbaar inmiddels zover, dat men zich van de weeromstuit extra ging bekommeren om de grondslagen en om de grenzen van de wetenschappelijke en wiskundige kennis. Zo drong in de achttiende eeuw de wiskunde zowel verder door in het domein van het alledaagse leven, als in het domein van de meer intellectuele en abstracte discussies van die tijd.

Gezien de toenemende aanwezigheid van de wiskunde in de achttiende eeuw, is het verrassend om te zien dat Danny Beckers in het zesde hoofdstuk onze aandacht vraagt voor een tweetal ontwikkelingen in de negentiende eeuw, die op het eerste gezicht tegenstrijdig lijken te zijn: zuivering en institutionalisering. Men zou eigenlijk verwachten dat, wanneer de wiskunde gezuiverd wordt, meer en meer abstract gaat worden en zich gaat richten op bewijsvoering en logische samenhang, deze ontwikkeling de wiskunde juist minder aantrekkelijk maakt voor de grote groep mensen die gebruik maakt van nieuwe wiskundige kennis. Immers, als landmeetkunde en artillerie worden uitgesloten van het vak wiskunde, dan zijn Morgenster en zijn collega's niet langer meer wiskundigen in de traditionele zin van het woord.

Anders dan men zou verwachten, heeft wiskunde als vak, als discipline, zich in de negentiende eeuw zeer sterk kunnen manifesteren. Daarbij waren het niet zozeer de toepasbaarheid en praktische mogelijkheden van de wiskunde die een rol speelden, maar juist de exactheid en logische eigenschappen van het wiskundig redeneren. Hoewel de toegepaste wiskunde minder centraal kwam te staan, kreeg het onderwijs in de wiskunde toch een prominente plaats in de opvoeding van elke inwoner tot een beschaafde burger. De idealen van een autonoom en rationeel denkende en handelende mens die tijdens de Verlichting geformuleerd werden, kregen in deze periode gestalte in het onderwijscurriculum. Het spreekt vanzelf dat dit onderwijs niet meer gericht was op het aanleren van handige rekentrucs, maar op het logisch en exact redeneren dat men vooral middels de wiskunde hoopte over te dragen.

Deze ontwikkeling had natuurlijk veel praktische gevolgen voor het vak wiskunde en haar beoefenaars: de behoefte aan wiskundigen, aan wiskundige leerboeken, aan wiskundefaculteiten en dergelijke, nam enorm toe. Die wiskundigen verenigden zich in allerhande nationaal georiënteerde genootschappen en organiseerden vervolgens ook internationale symposia. Die internationalisering droeg zeker bij aan een toenemende interesse voor zuivere wiskunde, waardoor lokale verschillen in probleemstellingen en aanpak werden verkleind.

We zagen dat in de achttiende eeuw allerlei filosofische debatten gevoerd werden, die zich veelal bewogen op de grens tussen wiskundige kennis en metafysische of levensbeschouwelijke onderwerpen. Parallel aan de zuivering die de wiskunde in de negentiende eeuw onderging, verschoven ook de conceptuele debatten waaraan wiskundigen bijdroegen. Zo beschrijft Beckers hoe het getalbegrip steeds meer aandacht krijgt en om steeds complexere definities vraagt, terwijl men voorheen bijvoorbeeld de eigenschappen van negatieve getallen eenvoudigweg kon veronderstellen. Nu moesten die echter met een axiomatische en strenge bewijsvoering worden afgeleid.

Het is niet zo dat de toegepaste wiskunde doodbloedde, integendeel. Ook de mathematische natuurkunde en andere toepassingen van de wiskunde groeiden sterk en stegen in aanzien. Wel is het zo dat ook in die gebieden soms sprake was van zuivering, zoals blijkt uit de axiomatisering van de mechanica of de warmteleer. Wiskunde diende in toegepaste vorm de beschrijving van een vakgebied of domein, zonder dat het van belang was om – causaal of anderszins – te verklaren waarom die beschrijving effectief was. Een interessante ontwikkeling in dit verband is de toenemende belangstelling voor en toepassing van de kansberekening en statistiek. Was de zuivere wiskunde aantrekkelijk vanwege haar exactheid, in de praktijk bleken grootschalige (sociale) vraagstukken en empirische waarnemingen om een andere wiskundige aanpak te vragen, waarin juist kansen en mogelijke verbanden een rol spelen. Ondanks deze verschillen bestaat er toch een belangrijke overeenkomst tussen de status van de statistiek en van de zuivere wiskunde in die tijd: de vraag naar deze kennis neemt toe, er zijn steeds meer mensen mee bezig en allebei dragen ze bij aan de plaats van de wiskunde in de samenleving als geheel.

De wijze waarop de wiskunde die plaats gaat innemen en vooral met welke enorme groei dat gepaard gaat, zullen we verderop tegenkomen, wanneer de periode na de Tweede Wereldoorlog aan bod komt. Daarbij zal de explosie van allerhande deelgebieden in zowel de zuivere als toegepaste wiskunde opvallen: blijkbaar heeft de wiskunde zich zodanig ontwikkeld, dat het steeds eenvoudiger en zinniger is geworden om haar op de meest uiteenlopende onderwerpen toe te passen.

Gedeeltelijk is dat het gevolg van de zuivering van de wiskunde die in de negentiende eeuw plaatsvond. Daardoor is de wiskunde veranderd van een wetenschap van maat en getal in een wetenschap van (wiskundige) structuren. Meer nog dan maat en getal kan men structuren overal aantreffen of zoeken en bovendien overdragen op heel verschillende contexten, zoals een atoommodel vergeleken kan worden met een planetenstelsel. Omdat die structuren hiervoor – meer dan vroeger – in een abstracte vorm beschreven moeten worden, is het ook eenvoudiger om te zien hoe zo'n structuur aangepast, veranderd (getransformeerd) kan worden. Eigenlijk leende het veel gebruikte axiomatische model zich ook al voor dat soort veranderingen, omdat een enkele verandering van een axioma onmiddellijk het gehele afgeleide systeem zou veranderen. Toch heeft het tot in de negentiende eeuw geduurd voordat iets dergelijks met de euclidische meetkunde zou gebeuren, waarvoor het nodig bleek om het meetkundige ruimtebegrip niet meer te beperken tot een beschrijving van de natuurlijke driedimensionale ruimte.

In het hoofdstuk over de eerste helft van de twintigste eeuw beschrijft Teun Koetsier een aantal vernieuwingen die ontstonden in Göttingen – waar eerder deze niet-euclidische meetkunde werd ontwikkeld. Was deze meetkunde al bevrijd uit de fysische ruimte, zo werd vervolgens de idee van meerdimensionale meetkunden geopperd. De axiomatische stelsels waarmee dergelijke meetkunden worden opgesteld, vormen niet langer adequate definities van concrete, externe (ruimtelijke) objecten, maar bepalen intern de besproken structuren. Een soortgelijke benadering werd ook door de Franse Bourbakigroep bepleit – een Franse groep jonge wiskundigen, die gezamenlijk publiceerden onder het pseudoniem Nicolas Bourbaki. Interessant fenomeen is dat deze groep uit een aantal verschillende auteurs bestaat, terwijl in Göttingen een soortgelijk brandpunt van wiskundige expertise te vinden was. Vroeger hadden wiskundigen ook wel contact met elkaar (vaak schriftelijk), maar met de schaalvergroting en institutionalisering werd blijkbaar de directe samenwerking geboren.

Mooi voorbeeld van de onverwachtse toepassingsmogelijkheden van een abstracte wiskundige theorie, is de toepassing van de wiskundig ontwikkelde vierdimensionale 'tijd-ruimte' in de speciale relativiteitstheorie. Einstein kon daarmee de ruimte volgens de algemene relativiteitstheorie beschrijven. Natuurlijk bleef het gebruik van abstracte wiskundige modellen niet beperkt tot de natuurwetenschap. De trend om wiskunde ook in maatschappelijke contexten te gebruiken, was al in de negentiende eeuw begonnen en betrof met name de statistiek. Deze ontwikkeling zette zich in alle hevigheid voort, waarvan bijvoorbeeld het vak econometrie een gevolg is.

Toch is het niet een tijd van alleen maar optimisme en bloei in de wiskunde. De abstractie van de wiskunde en het feit dat wiskunde niet meer als beschrijving van externe objecten werd gezien, leverde ook fundamentele discussies op. Een eis aan een wiskundige theorie die wel gehandhaafd werd, is dat zij consistent moet zijn. Wanneer wiskundige elementen of verzamelingen echter beschouwd worden als het resultaat van mentale constructies, zoals de Nederlandse intuitionist Brouwer betoogde, dan kan zo'n eis om praktische redenen niet worden vervuld: een oneindige reeks getallen kunnen we mentaal niet doorlopen en dus kunnen we geen consistentie garanderen. Leek deze visie de fundamenten van de wiskunde te ondermijnen, later droeg vanuit andere hoek de onvolledigheidsstelling van Gödel daar nog meer aan bij. Deze onvolledigheidsstellingen wezen op het feit dat een axiomatisch stelsel (in de rekenkunde) niet zijn eigen consistentie en volledigheid kan bewijzen. Toch blijkt het bezwaar, dat de consistentie van een bepaalde theorie niet met de middelen van die theorie zelf bewezen kan worden, de ontwikkeling van de wiskunde niet werkelijk belemmerd te hebben. Integendeel: de discussies die hierdoor ontstonden hebben zelf weer tot nieuwe resultaten geleid.

Enerzijds heeft de wiskunde zich dus vanaf de negentiende eeuw steeds meer bekommerd om haar eigen structuur en grondslagen, anderzijds heeft zij toch ook steeds meer toepassingen gevonden: niet alleen in de wetenschap en het onderwijs, maar ook in bijvoorbeeld de industrie en als sociaal-politiek instrument. Blijkbaar hebben de fundamentele problemen niet geleid tot onbruikbaarheid van de toepassingen van de wiskunde en zijn er geen onderdelen van de wiskunde in hun geheel ongeldig verklaard, maar is hun geldigheid gebonden aan extra voorwaarden. De klassieke kwestie van de 'unreasonable effectiveness of mathematics' in andere wetenschappen, heeft door die grondslagenproblematiek wel aan kracht gewonnen. Desalniettemin heeft sindsdien de wiskunde alleen maar meer haar bruikbaarheid getoond, soms op heel onverwachtse momenten – wanneer lange tijd nadat een wiskundig inzicht geformuleerd was er een toepassing gevonden bleek.

Tijdens de Tweede Wereldoorlog werden er nieuwe takken van de wiskunde ontwikkeld ten behoeve van bijvoorbeeld de grote logistieke vraagstukken, de cryptografie of de stuursystemen van raketten. Na de Tweede Wereldoorlog heeft dat verschijnsel van de ontwikkeling van geheel nieuwe wiskundige domeinen een grote vlucht genomen, zoals Tom Koornwinder laat zien in 'Wiskunde in de laatste zes-

Wiskunde#3.indd 16 10-11-2006 11:02:59

tig jaar: exponentiële groei en structurele vernieuwing'. Blijkbaar zijn de wiskundige technieken zo ver doorontwikkeld, dat specialisering onvermijdelijk geworden is. Dat leidt ook tot een ander fenomeen, waarvan we de eerste tekenen al in de eerste helft van de twintigste eeuw zagen optreden: in toenemende mate gaan wiskundigen met elkaar samenwerken om complexe vraagstukken op te lossen. Een extreem voorbeeld is het bewijs voor het bestaan van een bepaald aantal 'enkelvoudige eindige groepen' dat in ongeveer tienduizend pagina's gepubliceerd werd door circa honderd wiskundigen. Dergelijke wiskunde is zelfs voor de specialist niet meer te overzien, laat staan voor de wetenschapper die wiskunde in zijn vak gebruikt of de gemiddelde student of scholier. Toch hebben ook die laatsten in toenemende mate te maken met complexe vormen van toegepaste wiskunde. Dit komt mede door allerlei technologieën die in grote mate berusten op nieuwe vormen van wiskunde, zoals de computer, digitale apparaten voor geluid en beeld, enzovoort.

Op zijn beurt heeft de computer ook weer een grote impuls gegeven aan ontwikkelingen binnen de wiskunde. Dan gaat het niet alleen om het feit dat de computer een beroep doet op allerhande vormen van discrete in plaats van continue wiskunde (omdat digitale apparaten nu eenmaal gebruik maken van discrete input), maar ook om de mogelijkheden die de computer biedt. Natuurlijk niet alleen als rekenmachine voor grote en complexe dataverzamelingen, maar tegenwoordig zelfs bij het bewijzen van bepaalde wiskundige stellingen, wordt wel van de computer gebruik gemaakt. Zo heeft de wiskunde een toepassing gevonden in een apparaat dat vervolgens in belangrijke mate heeft bijgedragen aan de ontwikkelingen en toepassingen van de wiskunde zelf.

Al met al heeft de wiskunde na de Tweede Wereldoorlog zich explosief ontwikkeld, zowel in omvang van het aantal beoefenaars en publicaties als wat betreft het aantal deelgebieden en toepassingen. Meer nog dan voorheen valt de wiskunde niet meer weg te denken uit onze wereld, terwijl tegelijkertijd veel van de gebruikte wiskunde het domein van specialisten is geworden.

Op zichzelf hoeft dat geen probleem te zijn en geldt dat niet uitsluitend voor de wiskunde: ook in andere wetenschappelijke disciplines heeft vergaande specialisatie de kloof tussen lekenkennis en wetenschap enorm vergroot. Zorgwekkend zou het zijn wanneer die kloof ertoe zou leiden dat de wiskunde alleen maar als specialistenvak wordt beschouwd en men zelfs elementaire delen van de wiskunde niet meer als onderdeel van elke volledige opvoeding en scholing vereist.

NOTEN

1. Geoffrey Lloyd geeft dan ook als twee karakteristieken van deze natuurfilosofen: 'First there is what may be described as the discovery of nature, and second the practice of rational criticism and debate.' In: *Early Greek Science: Thales to Aristotle*. Chatto & Windus 1970, p. 8.
2. Zie S. Sambursky: *The Physical World of the Greeks*, Routledge, Londen 1956, p. 14 hierover: 'Here we have the scientific model in its purely descriptive sense – the reduction in scale of cosmic dimensions to a size at which the whole and its parts can be conveniently studied.' Het woord 'model' is hier van groot belang.

LITERATUUR

Diog. Laertios I 27; in: *Die Vorsokratiker*; vert. J. Mansfeld, Reclam Verlag, Stuttgart 1987, p. 49.

Herodotos, *Historiën*. Vert. Onno Damsté, Fibula-van Dishoeck, Bussum 1974; p. 103.

Hippolytos, Haer. I, 1 en 6,3-5; in: *Die Vorsokratiker*; vert. J. Mansfeld, Reclam Verlag, Stuttgart 1987, respectievelijk pp. 53 en 77.